

க.பொ.த.(உ.தரம்) - உதவிக் கருத்தரங்கு - 2016
விடையளித்தலுக்கான வழிகாட்டி
இணைந்த கணிதம்- I ஆம் வினாத்தாள்

பகுதி A

1. $f(n) = 4^n + 15n - 1$; $n \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம்.

$$n = 1 \text{ ஆக இருக்கும்போது } f(1) = 4 + 15 - 1 = 18 = 9 \times 2$$

$\therefore f(1)$ ஆனது 9 இனால் வகுக்கப்படுகின்றது.

$\therefore n = 1$ இற்குக் கோவை உண்மையானது. (5)

$n = p, p \in \mathbb{Z}^+$ இற்குக் கோவை 9 இனால் வகுக்கப்படுகின்றதெனக் கொள்வோம்.

$$\text{எனின், } f(p) = 4^p + 15p - 1 = 9k; k \in \mathbb{Z}^+ \quad (5)$$

$$f(p+1) = 4^{p+1} + 15(p+1) - 1$$

$$= 4 \cdot 4^p + 15p + 15 - 1$$

$$= 4 [9k - 15p + 1] + 15p + 15 - 1 \quad (5)$$

$$= 4 \times 9k - 45p + 18$$

$$= 9 [4k - 5p + 2]$$

$$= 9\lambda; \lambda = 4k - 5p + 2 \in \mathbb{Z}^+$$

$\therefore f(p+1)$ ஆனது 9 இனால் வகுப்படுகின்றது.

$\therefore n = p+1$ ஆக இருக்கும்போது கோவை உண்மையானது. (5)

$\therefore$ கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டினால் எல்லா நேர் நிறையெண்கள் n இற்கும் தரப்பட்டுள்ள கோவை

9 இனால் வகுக்கப்படுகின்றது, (5)

25

$$\left(\sqrt{2} + 7^{\frac{1}{5}}\right)^{10} = \sum_{r=0}^{10} {}^{10}C_r \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10-r} \left(7^{\frac{1}{5}}\right)^r$$

2.

$$T_r = {}^{10}C_{r-1} \left(2\right)^{\frac{11-r}{2}} \left(7\right)^{\frac{r-1}{5}}; \text{ இங்கு } 1 \leq r \leq 11 \text{ வீ. } (5)$$

2, 7 ஆகியன முதன்மை ஆகையால் விகிதமுறும் உறுப்புகளுக்கு $11-r = 2p$ ஆகவும் (5)

$$r-1 = 5q \text{ ஆகவும் இருத்தல் வேண்டும். } p, q \in \mathbb{Z}^+ \quad (5)$$

அதாவது $r \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{1, 6, 11\}$

$\therefore r = 1$ அல்லது 11. (5)

$$\text{விகிதமுறும் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை} = {}^{10}C_0 2^5 + {}^{10}C_{10} 7^2$$

$$= 32 + 49 = 81 \quad (5)$$

25

3. எவ்வித எல்லையுமின்றி 5 பிள்ளைகளைக் கொண்ட ஒரு குழுவை தெறிந்தெடுக்கத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}^{14}C_5$$

$$= 2002 \quad (5)$$

- 5 ஆண் பிள்ளைகளைக் கொண்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}^8C_5$$

$$= 56 \quad (5)$$

- 5 ஆண் பிள்ளைகளைக் கொண்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}^6C_5$$

$$= 6 \quad (5)$$

- ∴ இருபாலர்களையும் வகைகுறிக்குமாறு 5 பிள்ளைகளைக் கொண்ட ஒரு குழுவை தெறிந்தெடுக்கத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கை

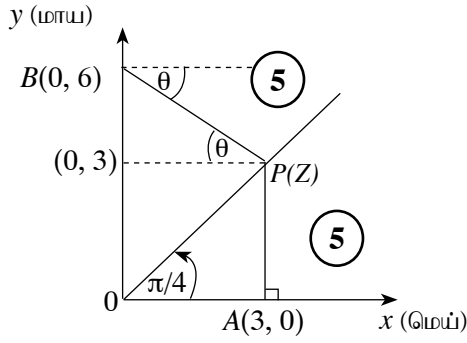
$$= {}^{14}C_5 - ({}^8C_5 + {}^6C_5)$$

$$= 2002 - 56 - 6 \quad (5)$$

$$= 1940 \quad (5)$$

25

4.



$\text{Arg } Z = \frac{\pi}{4}$, $\text{Arg } (Z - 3) = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்குமாறு சிக்கலெண் $Z = Z_0$ ஐ ஒத்த புள்ளி உருவிற்கேற்ப P ஆகும்.

(5) உருவிற்கேற்ப $\theta = \frac{\pi}{4}$ லீ. (5)

ஆகவே $\text{Arg } (Z_0 - 6i) = \frac{7\pi}{4}$. (5)

25

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + kx)^2 - (1 - kx)^2}{\sqrt{1 + k^2x} - \sqrt{1 - k^2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2kx + k^2x^2 - 1 + 2kx - k^2x^2}{(1 + k^2x) - (1 - k^2x)} \times (\sqrt{1 + k^2x} + \sqrt{1 - k^2x}) \quad (10)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4kx}{2k^2x} (\sqrt{1 + k^2x} + \sqrt{1 - k^2x}) ; k, x \neq 0$$

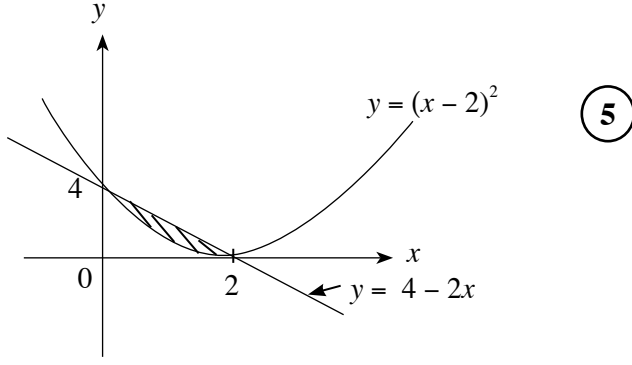
$$= \frac{2}{k} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + k^2x} + \sqrt{1 - k^2x}) = \left(\frac{2}{k}\right) \times 2 = \frac{4}{k} \quad (5)$$

$$\frac{4}{k} = 1 \quad (5)$$

$$\therefore k = 4 \quad (5)$$

25

6.



$$\begin{aligned}
 \text{பரப்பளவு} &= \int_0^2 \{ (4-2x) - (x-2)^2 \} dx \\
 &= \int_0^2 (4-2x) dx - \int_0^2 (x-2)^2 dx \\
 &= \left[4x - \frac{2x^2}{2} \right]_0^2 - \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= (8-4) - \left[0 + \frac{8}{3} \right] \\
 &= 4 - \frac{8}{3} \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

7. t ஐக் குறித்து வகையிடும்போது

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \frac{dy}{dt} = 3at^2 - 2t \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (3at^2 - 2t) \cdot \frac{1}{2t} = \frac{3at - 2}{2} ; t \neq 0 \quad (5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=1} = \frac{3a-2}{2} \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=-1} = \frac{-3a-2}{2} \quad (5)$$

தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று $\perp$ ஆகையால்,

$$\left(\frac{3a-2}{2} \right) \left(\frac{-3a-2}{2} \right) = -1 \quad (5)$$

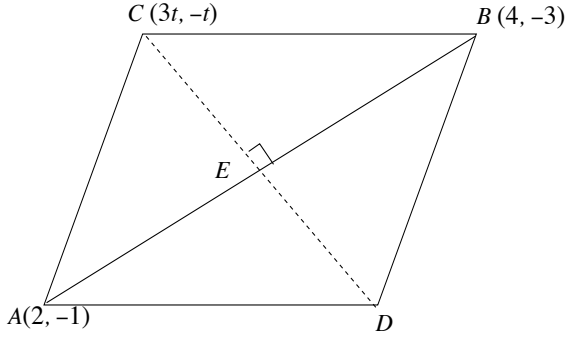
$$9a^2 - 4 = 4 \Rightarrow a^2 = 8/9$$

$$a > 0 \text{ ஆகையால் } a = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (5)$$

25

25

8.



$$E = (3, -2)$$

AB ஆனது CE ⊥ இற்குச் செங்குத்தாகையால்

$$m_{AB} \cdot m_{CE} = -1 .$$

$$-1 \left(\frac{-2+t}{3-3t} \right) = -1 \quad (5)$$

$$\Rightarrow t = \frac{5}{4} \quad (5)$$

$$\therefore C = \left(\frac{15}{4}, -\frac{5}{4} \right) \quad (5)$$

D = (x̄, ȳ) எனக் கொள்வோம்.

(5)

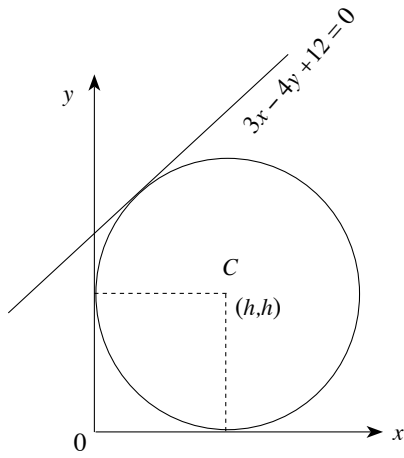
$$\bar{x} = 2 \times 3 - 3t = 6 - 3 \times \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\bar{y} = 2 \times -2 + t = -4 + \frac{5}{4} = -\frac{11}{4}$$

$$\therefore D = \left(\frac{9}{4}, -\frac{11}{4} \right) \quad (5)$$

25

9.



தேவையான வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்வோம்.

வட்டம் x, y அச்சுக்களைத் தொடுகின்றமையால் $C = (h, h)$.

(5)

மேலும் கோடு $3x - 4y + 12 = 0$ வட்டத்தை தொடுகின்றமையால்

$$\frac{|3h - 4h + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = |h|$$

(5)

$$|-h + 12| = 5|h|$$

(5)

$$\Leftrightarrow (-h + 12) = \pm 5h$$

(5)

$$\therefore h = -3 \text{ அல்லது } h = 2.$$

$\therefore$ வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$$

(5)

25

10. $\cot \alpha - \tan \alpha$

$$= \frac{1}{\tan \alpha} - \tan \alpha$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{\tan \alpha}$$

$$= \frac{2(1 - \tan^2 \alpha)}{2 \tan \alpha} = \frac{2}{\tan 2\alpha}$$

$$= 2 \cot 2\alpha$$

(5)

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha \quad \text{—————} \quad (1)$$

$$\therefore \cot 2\alpha - \tan 2\alpha = 2 \cot 4\alpha \quad \text{—————} \quad (2)$$

(5)

$$\cot 4\alpha - \tan 4\alpha = 2 \cot 8\alpha \quad \text{—————} \quad (3)$$

(5)

$$(1) + 2 \times (2) + 4 \times (3) \text{ இன் மூலம்}$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha - 2 \tan 2\alpha - 4 \tan 4\alpha = 8 \cot 8\alpha$$

(10)

$$\cot \alpha = \tan \alpha + 2 \tan 2\alpha + 4 \tan 4\alpha + 8 \cot 8\alpha$$

25

11. (a) $ax^2 + bx + c = 0$

$$a \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right] = 0$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = 0$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right] = 0 \quad (10)$$

பொருந்தும் மூலங்கள் இருப்பதற்கு $b^2 - 4ac = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும் (10)

20

$$\frac{a}{x+c} + \frac{b}{x-c} = \frac{k}{2x}$$

$$\frac{a(x-c) + b(x+c)}{x^2 - c^2} = \frac{k}{2x}$$

$$x^2 [k - 2a - 2b] - 2(bc - ac)x - kc^2 = 0 \quad (10)$$

பொருந்தும் மூலங்கள் இருப்பதற்கு

$$4(bc - ac)^2 - 4(k - 2a - 2b)(-kc^2) = 0 \text{ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.} \quad (10)$$

$$\text{அதாவது } k^2 - 2(a+b)k + (b-a)^2 = 0 \quad (5)$$

இங்கு மூலங்கள் k_1, k_2 எனின்

$$k_1 + k_2 = 2(a+b) \quad (5) \quad k_1 k_2 = (b-a)^2 \quad (5)$$

$$(k_1 - k_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1 k_2 \quad (10)$$

$$= 4(a+b)^2 - 4(b-a)^2$$

$$= 16ab$$

$$\therefore |k_1 - k_2| = 4\sqrt{ab} \quad (10)$$

55

(b) $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (6 - 3\lambda)x + (20 - 12\lambda)$

(i) $\lambda = -1$ ஆக இருக்கும் போது $f(x)$ ஏகபரிமாணமானது. (5)

(ii) இரு மூலங்களும் $\alpha, -\alpha$ எனக் கொள்வோம் (5)

$$\text{அப்போது } \alpha + (-\alpha) = -\frac{(6 - 3\lambda)}{(\lambda + 1)} \quad (5)$$

$$\therefore 0 = 6 - 3\lambda \Rightarrow \lambda = 2. \quad (5)$$

(iii) $f(x) = h - b(x - a)^2 = h - b(x^2 - 2ax + a^2) = -bx^2 + 2abx + (h - ba^2)$

$f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (6 - 3\lambda)x + (20 - 12\lambda)$ (5)

குணகங்களை ஒப்பிடுக்போது $-b = \lambda + 1 \Rightarrow b = -(\lambda + 1)$ (1) (5)

$2ab = 6 - 3\lambda \Rightarrow a = -\frac{3(2 - \lambda)}{2(\lambda + 1)}$ (2) (5)

$h - ba^2 = 20 - 12\lambda \Rightarrow h = 4(5 - 3\lambda) - \frac{9(2 - \lambda)^2}{4(\lambda + 1)}$ (3) (10)

$x = 2$ ஆக இருக்கும்போது $f(x)$ ஓர் உயர்வு ஆகையால் $a = 2$. (5)

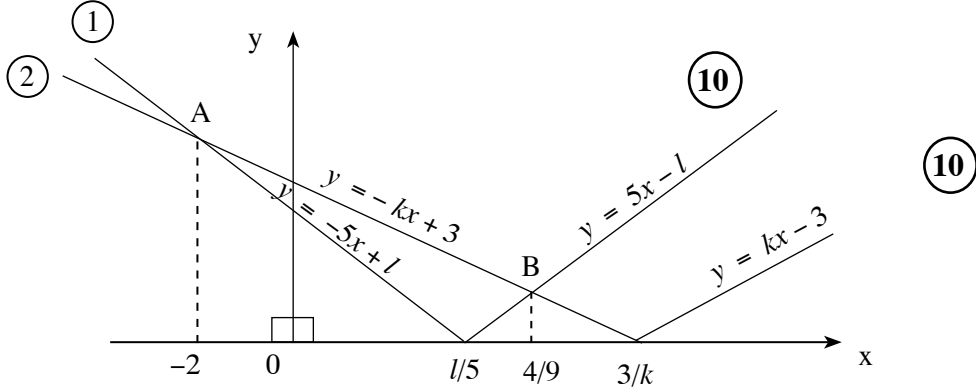
(2) $\Rightarrow 4(\lambda + 1) = -(6 - 3\lambda) \Rightarrow 4\lambda + 4 = -6 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = -10$ (5)

$h = 4(5 + 30) - \frac{9}{4} \frac{(2 + 10)^2}{(-10 + 1)}$ (10)

$f(x)$ இன் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானம் = 176 (10)

75

12. (a) $|l - 5x| < |kx - 3|$ இன் தீர்வுத்தொடை $\{x \mid -2 < x < 4/9\}$ ஆகையால் இரு வரைபுகளும் கீழே உள்ளவாறு இருக்கின்றன.



(1) $y = |l - 5x|$

(2) $y = |kx - 3|$

புள்ளி A இற்கு $l + 10 = 2k + 3$ (5)
 $l - 2k = -7$ (i) (5)

புள்ளி B இற்கு $-l + 5 \cdot \frac{4}{9} = -k \cdot \frac{4}{9} + 3$ (5)
 $-9l + 4k = 7$ (ii) (5)

(i), (ii) ஆகியவற்றின் மூலம் $l = 1$, $k = 4$ (5)

50

$$(b) \quad S_n = \frac{3n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2} \quad (5)$$

முடிவுள்ளது. (5)

∴ ஆகவே அத்தொடர் ஒருங்குகின்றது. (5)

$$U_r = S_r - S_{r-1} \quad (5)$$

$$= \frac{3r}{2r+1} - \frac{3(r-1)}{2r-1} \quad (5)$$

$$U_r = \frac{3}{4r^2-1} \quad (5)$$

$$S'_n = \sum_{r=1}^n r^2 \frac{3}{4r^2-1} \quad \text{எனக் கொள்வோம்} \quad (5)$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{\frac{3}{4}(4r^2-1) + \frac{3}{4}}{(4r^2-1)} \quad (5)$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n \frac{3}{4r^2-1} \quad (10)$$

$$= \frac{3n}{4} + \frac{1}{4} S_n \quad (5)$$

$$= \frac{3n}{4} + \frac{1}{4} \frac{3n}{(2n+1)} \quad (5)$$

$$= \frac{3n}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2n+1} \right\} \quad (5)$$

$$= \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)} \quad (5)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n r^2 U_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2n+1} \right\} \quad (5)$$

$$= \infty \quad (5)$$

முடிவுள்ளது என்று (5)

∴ அத்தொடர் ஒருங்குவதில்லை. (5)

13. (a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & p \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2p \quad (5)$$

A^{-1} உளதாக இருப்பதற்கு $\det A \neq 0$.

அதாவது, $p \neq 9/2$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். (5)

$$A^{-1} = \frac{1}{(2p-9)} \begin{bmatrix} -3 & -p \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A^{-1} = A$$

$$\frac{1}{(2p-9)} \begin{bmatrix} -3 & -p \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & p \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ஒத்த மூலகங்களை ஒப்பிடும்போது

$$-\frac{3}{2p-9} = 3 \quad \frac{-p}{2p-9} = p \quad (5)$$

$$\frac{2}{2p-9} = -2, \quad \frac{3}{2p-9} = -3 \quad (5)$$

$$(5)$$

$$(5)$$

$$\Rightarrow 2p-9 = -1, \quad p[1+2p-9] = 0$$

$p \neq 0$ ஆகையால் $p = 4$ இருத்தல் வேண்டும்

$$(5)$$

$$\text{அப்போது } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = A$$

$$\Rightarrow AA^{-1} = A \cdot A = A^2 \quad (5)$$

$$\therefore I = A^2$$

$$\Rightarrow 0 = A^2 - I \quad (5)$$

$$\Rightarrow 0 = (A - I)(A + I); I^2 = I$$

அதாவது வடிவம் $0 = BC$ ஐ எடுக்கின்றது.

$$\text{இங்கு } B = A - I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(5)$$

$$\begin{aligned} C = A + I &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

75

(b) (i) Let $Z = x + iy$, எனக் கொள்வோம் $x, y \in R$

$$\begin{aligned} Z\bar{Z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |Z|^2 \\ \therefore Z\bar{Z} &= |Z|^2 \end{aligned}$$

10

(ii) Let $Z_1 = x_1 + iy_1$ & $Z_2 = x_2 + iy_2$ எனக் கொள்வோம் $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$.

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ \therefore \overline{Z_1 Z_2} &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ &= x_1(x_2 - iy_2) - iy_1(-iy_2 + x_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \end{aligned}$$

$$\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 .$$

$$(iii) \left| \frac{\bar{Z}_1 - 2\bar{Z}_2}{2 - Z_1 \bar{Z}_2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow |\bar{Z}_1 - 2\bar{Z}_2| = |2 - Z_1 \bar{Z}_2|$$

$$\Rightarrow |\bar{Z}_1 - 2\bar{Z}_2|^2 = |2 - Z_1 \bar{Z}_2|^2$$

$$\Rightarrow (\bar{Z}_1 - 2\bar{Z}_2)(\overline{\bar{Z}_1 - 2\bar{Z}_2}) = (2 - Z_1 \bar{Z}_2)(\overline{2 - Z_1 \bar{Z}_2})$$

$$\Rightarrow (\bar{Z}_1 - 2\bar{Z}_2)(Z_1 - 2Z_2) = (2 - Z_1 \bar{Z}_2)(2 - \bar{Z}_1 Z_2)$$

5

5

10

5

5

5

5

$$Z_1 \bar{Z}_1 - 2 \bar{Z}_1 Z_2 - 2 \bar{Z}_2 Z_1 + 4 Z_2 \bar{Z}_2 = 4 - 2 \bar{Z}_1 Z_2 - 2 Z_1 \bar{Z}_2 + Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 \quad (5)$$

$$|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2 = 4 + |Z_1|^2 |Z_2|^2$$

$$|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2 - |Z_1|^2 \cdot |Z_2|^2 - 4 = 0$$

$$|Z_1|^2 (1 - |Z_2|^2) - 4 (1 - |Z_2|^2) = 0$$

$$(1 - |Z_2|^2) (|Z_1|^2 - 4) = 0 \quad (5)$$

$$|Z_2| \neq 1, \text{ ஆகையால் } |Z_1|^2 - 4 = 0$$

$$\therefore |Z_1|^2 = 4$$

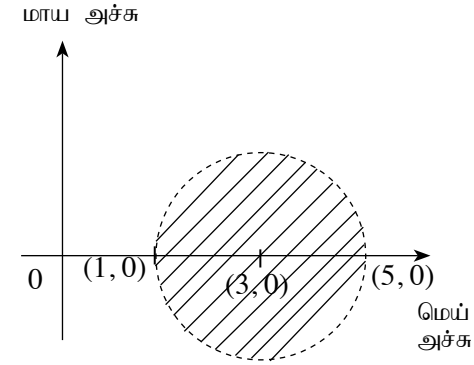
$$|Z_1| > 0, \text{ ஆகையால் } |Z_1| = 2$$

(5)

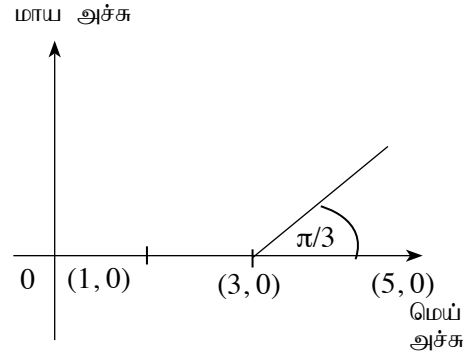
35

(c)

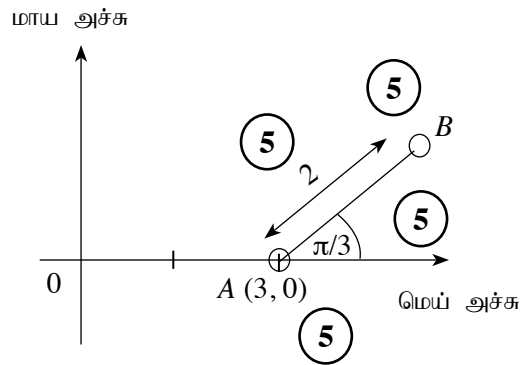
$$|Z - 3| < 2$$



$$\text{Arg}(Z - 3) = \frac{\pi}{3}$$



$|Z - 3| < 2$, $\text{Arg}(Z - 3) = \frac{\pi}{3}$; ஆகிய இரண்டும் திருப்தியாக்கும் P இன் ஒழுக்கு



20

14. (a) $y = (\sin x)^x \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\ln y = x \ln |\sin x| \quad (10)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln |\sin x| + x \cot x \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dx} = [x \cot x + \ln (\sin x)] (\sin x)^x \quad (5)$$

25

(b) தாங்கியின் கனவளவு $= \pi x^2 y + \frac{2}{3} \pi x^3$

$$\therefore \pi x^2 y + \frac{2}{3} \pi x^3 = 45\pi \quad (5)$$

$$\therefore 45 = x^2 \left(y + \frac{2}{3} x \right)$$

$$y = \frac{45}{x^2} - \frac{2}{3} x \quad (5)$$

தாங்கியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

$$A = 2\pi x^2 + \pi x^2 + 2\pi xy \quad (10)$$

$$A = 3\pi x^2 + 2\pi xy$$

$$A = 3\pi x^2 + 2\pi x \left(\frac{45}{x^2} - \frac{2}{3} x \right)$$

$$A = 3\pi x^2 + \frac{90\pi}{x} - \frac{4\pi}{3} x^2$$

$$A = \frac{5\pi}{3} x^2 + \frac{90\pi}{x} \quad (5)$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{10\pi x}{3} - \frac{90\pi}{x^2} \quad (5)$$

$$= \frac{10\pi (x^3 - 27)}{3x^2}$$

$$= \frac{10\pi}{3x^2} (x - 3)(x^2 + 3x + 9) \quad (5)$$

$$x = 3 \text{ ஆக இருக்கும்போது } \frac{dA}{dx} = 0. \quad (5)$$

x	$0 < x < 3$	$3 < x$
$\frac{dA}{dx}$	< 0	> 0

5

$\therefore x = 3$ ஆக இருக்கும்போது மேற்பரப்பின் பரப்பளவு இழிவாகும்.

5

$$y = \frac{45}{9} - \frac{6}{3}$$

$$= 3$$

5

55

(c) $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)}$

$f(0) = 2$ ஆகையால்

$a + b = 2$ _____ (1) (5)

$f'(x) = -\frac{2a}{(x-1)^3} - \frac{b}{(x+1)^2}$ (5)

$f'(0) = 0$ ஆகையால்

$2a - b = 0$ _____ (2) (5)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}$ (5)

$f'(x) = -\frac{4}{3} \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{4}{3(x+1)^2}$ (5)

$= -\frac{4}{3} \left\{ \frac{(x+1)^2 + (x-1)^3}{(x-1)^3 (x+1)^2} \right\}$

$= -\frac{4}{3} \left[\frac{x^3 - 2x^2 + 5x}{(x-1)^3 (x+1)^2} \right]$

$= -\frac{4x}{3} \left[\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^3 (x+1)^2} \right]$

$= -\frac{4x}{3} \left[\frac{(x-1)^2 + 4}{(x-1)^3 (x+1)^2} \right]$

எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $(x-1)^2 + 4 > 0$ ஆகையால், $x = 0$ ஆக இருந்தால் $f'(x) = 0$. (5)

x	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$	< 0	< 0	> 0	< 0
	f குறையும்	f குறையும்	f அதிகரிக்கும்	f குறையும்

(10)

$x = 0$ இல் சார்பு f இற்கு ஒரு இட இழிவு இருக்கின்றது. (5)

அப்போது $f(0) = 2$.

$x \longrightarrow \pm \infty$ ஆக இருக்கும்போது $f(x) \longrightarrow 0$

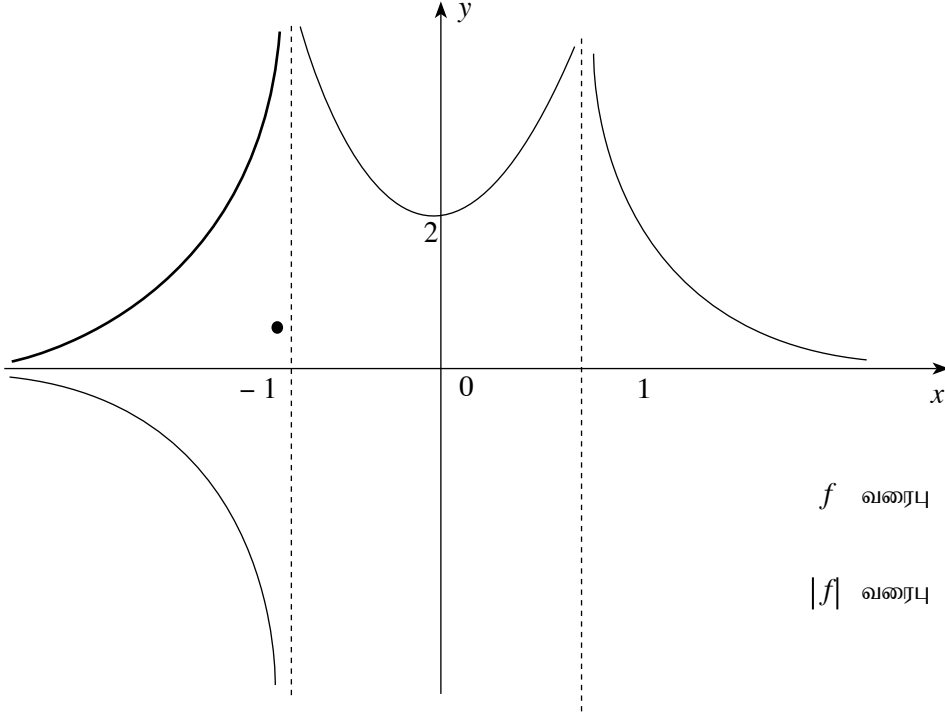
$x \longrightarrow -1^-, f(x) \longrightarrow -\infty$

$x \longrightarrow -1^+, f(x) \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow 1^-, f(x) \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow 1^+, f(x) \longrightarrow +\infty$

(10)



f வரைபு (10)

$|f|$ வரைபு (5)

70

15. (a) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{1/2} (2-x)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{1/2} (2-x)}$

$x = 2 \sin \theta$ ஐப் பிரதியிடும்போது

$dx = 2 \cos \theta d\theta$

$x = 0, \sin \theta = 0$

$\theta = 0$

$x = 1, \sin \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$I = \int_0^{\pi/6} \frac{2 \cos \theta}{(4 - 4 \sin^2 \theta)^{1/2} (2 - 2 \sin \theta)} d\theta$

$= \int_0^{\pi/6} \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta \cdot 2(1 - \sin \theta)} d\theta$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \sec^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \sec \theta \tan \theta d\theta$

$= \frac{1}{2} [\tan \theta]_0^{\pi/6} + \frac{1}{2} [\sec \theta]_0^{\pi/6}$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right] = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

(5)

(5)

50

(b) $G(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+8)}$ (5)

$$1 = A(x^2+8) + (Bx+C)(x+2) \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \text{ குணகம் : } 0 = A + B \Rightarrow A = -B \\ x \text{ குணகம் : } 0 = 2B + C \Rightarrow C = -2B \end{array} \right\} \quad (5)$$

மாநிலி : $1 = 8A + 2C \quad (5)$

$$1 = -8B - 4B \Rightarrow 12B = -1$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{12} \quad (5)$$

$$A = \frac{1}{12}, \quad C = \frac{1}{6}$$

(5)

(5)

$$g(x) = \int \frac{1}{(x+2)(x^2+8)} dx$$

$$g(x) = \frac{1}{12} \int \frac{1}{(x+2)} dx - \frac{1}{12} \int \frac{x}{(x^2+8)} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{(x^2+8)} dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{12} \ln |x+2| - \frac{1}{24} \ln (x^2+8) + \frac{1}{6} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) + C \quad (5)$$

$$= \frac{1}{24} \ln \left[\frac{(x+2)^2}{x^2+8} \right] + \frac{1}{6} \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) + C \quad (5)$$

$$= \frac{1}{24} \ln \left[\frac{(x+2)^2}{x^2+8} \right] + \frac{1}{12\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) + C \quad (5)$$

60

$$\begin{aligned}
 (c) \quad I_n &= \int x^n \sin x \, dx \\
 &= \int -x^n \frac{d}{dx} (\cos x) \quad (5) \\
 &= [-x^n \cos x] + \int (\cos x) n x^{n-1} dx \quad (10) \\
 &= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \frac{d}{dx} (\sin x) \quad (5) \\
 &= -x^n \cos x + n \left\{ x^{n-1} \sin x - \int \sin x (n-1) x^{n-2} dx \right\} \quad (10) \\
 &= -x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1) I_{n-2} \quad (5) \\
 I_n + n(n-1) I_{n-2} &= x^{n-1} [n \sin x - x \cos x] \quad (5)
 \end{aligned}$$

40

16. (a)

எந்தவொரு கோண இருகூறாக்கி மீதும் உள்ள புள்ளி

$P(\bar{x}, \bar{y})$ எனின்,

$$PL = PN \quad (5)$$

$$\frac{|a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2 \bar{x} + b_2 \bar{y} + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 \bar{x} + b_2 \bar{y} + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (5)$$

$\bar{x} \rightarrow x, \bar{y} \rightarrow y$ எனப் பிரதிபலிப்புச் செய்யும்போது

(5)

கோண இருகூறாக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

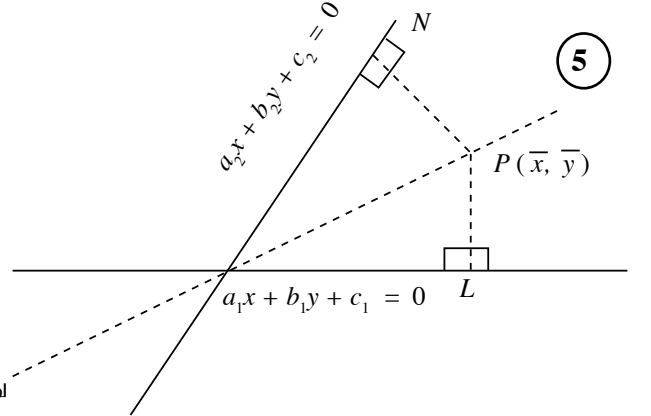
$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (5)$$

கோண இருகூறாக்கும் கோடுகளின் சமன்பாடு

$$\frac{4x + y + 3}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \pm \frac{x + 4y - 3}{\sqrt{1^2 + 4^2}} \quad (5)$$

$$+ : 3x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

$$- : 5x + 5y = 0 \Rightarrow x + y = 0 \quad (5)$$



$x + y = 0$, $x - y + 2 = 0$ ஆகியவற்றைத் தீர்க்கும்போது

$$x = -1, \quad y = 1$$

(5)

$A = (-1, 1)$ எனக் கொள்வோம்.

$B = (0, 2)$, $x - y + 2 = 0$ மீது உள்ளது.

(5)

$P = (x, y)$ ஆனது $x + y = 0$ மீது உள்ள ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம்

$PA \perp PB$ ஆகையால்

$$\left(\frac{y-1}{x+1}\right) \times 1 = -1$$

(5)

$$\frac{y-1}{-1} = \frac{x+1}{1} = t; \quad t \text{ ஆனது ஒரு பரமானம்}$$

(5)

$$\therefore x = -1 + t, \quad y = 1 - t$$

$x + y = 0$ மீது $AD = AB$ ஆக இருக்குமாறு

புள்ளி D ஐ ஒத்த பரமானம் T எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $D = (-1 + T, 1 - T)$

(5)

$$AD^2 = AB^2 \Rightarrow T^2 + T^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

(5)

$$T = \pm 1$$

(5)

$\therefore D = (0, 0)$ அல்லது $(-2, +2)$

(5)

(5)

$D \equiv (0, 0)$ ஆக இருக்கும்போது CD இன் சமன்பாடு

$$x - y = 0$$

(5)

$D' \equiv (-2, +2)$ ஆக இருக்கும்போது $C'D'$ இன் சமன்பாடு

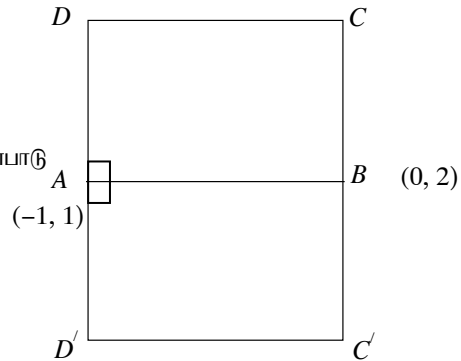
$$x - y + 4 = 0$$

(5)

BC , BC' ஆகிய கோடுகளின் சமன்பாடு

$$x + y - 2 = 0$$

(5)



(b) $S^1 = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்வோம். இங்கு g, f, c ஆகியன மாறிலிகள்.

(5)

$S^1 = 0$ இனால் $S = 0$ இருகூறிடப்படுகின்றமையால்

கோடு $S^1 - S = 0$ மீது $S = 0$ இன் மையம் உள்ளது.

(5)

$$-2x(g+1) - 2y(f-2) - 3 - c = 0$$

(5)

$$\therefore 2(g)(g+1) + 2(f)(f-2) - c - 3 = 0 \text{ —————}$$

(1)

(5)

$S = 0$ வட்டம் $(1, 1)$ இனூடாகச் செல்கின்றமையால்

$$1^2 + 1^2 + 2g + 2f + c = 0$$

$$\therefore c = -2g - 2f - 2 \text{ —————}$$

(2)

(5)

(1) , (2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$2g^2 + 2g + 2f^2 - 4f - (-2g - 2f - 2) - 3 = 0$$

$$2g^2 + 2f^2 + 4g - 2f - 1 = 0$$

$$2(-g)^2 + 2(-f)^2 - 4(-g) + 2(-f) - 1 = 0$$

(5)

$\therefore$ புள்ளி $(-g, -f)$ ஆனது வட்டம் $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ இன் மீது உள்ளது.

(5)

இங்கு மையம் $(1, -\frac{1}{2})$

(5)

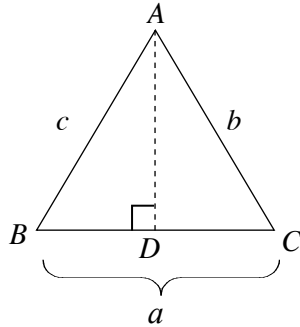
$$\text{ஆரை} = \sqrt{1^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2}$$

(5)

50

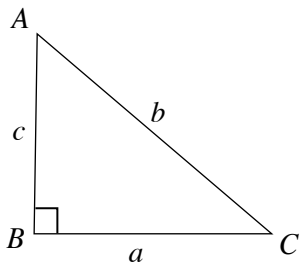
17. (a)



$$a = BC = BD + DC$$

$$a = c \cos B + b \cos C$$

(5)

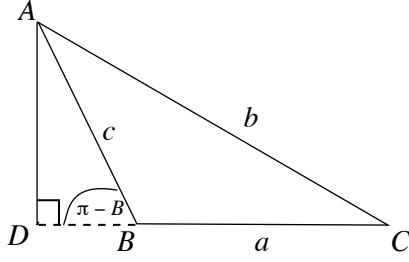


$$a = b \cos C + 0$$

$$= b \cos C + c \cos 90^\circ$$

$$= b \cos C + c \cos B$$

(5)



$$\begin{aligned} a &= BC = CD - BD \\ &= b \cos C - c \cos (\pi - B) \\ &= b \cos C + c \cos B \end{aligned}$$

(5)

அவ்வாறே $b = a \cos C + c \cos A$

$$a \cos C = b - c \cos A$$

$$a^2 \cos^2 C = b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A \quad (10)$$

$$a^2 - a^2 \sin^2 C = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - c^2 \sin^2 A$$

$$\underbrace{a^2 + c^2 \sin^2 A - a^2 \sin^2 C}_{= 0} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ; \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ ஆகையால்}$$

(5)

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

a, b, c ஆகியன கூட்டல் விருத்தியில் இருப்பின்

$$a + c = 2b \quad (5)$$

$$b \cos C + c \cos B + a \cos B + b \cos A = 2b \quad (5)$$

$$\cos A + \cos C + 2 \cos B = 2$$

$$2 \cos \left(\frac{A+C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2 (1 - \cos B) \quad (5)$$

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 4 \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2 \sin \frac{B}{2} \quad (5)$$

50

(b) $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$

$$\therefore 0 < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\sin x > \cos y = \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \quad (5)$$

$$\sin x > \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right)$$

ஆட்சி $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ இல் கோணம் அதிகரிக்கும்போது சைன் பெறுமானம் அதிகரிக்கின்றமையால்

(10)

$$\therefore x > \frac{\pi}{2} - y \quad (5)$$

25

$$x + y > \frac{\pi}{2}$$

(c) $f(x) = 3 \cos^2 x + 8 \sin x \cos x - 3 \sin^2 x$

$= 3 \cos 2x + 4 \sin 2x$ (5)

(5)

$= 5\left(\frac{3}{5} \cos 2x + \frac{4}{5} \sin 2x\right)$ (5)

$= 5(\sin \alpha \cos 2x + \cos \alpha \sin 2x)$

$= 5 \sin(2x + \alpha)$

$= A \sin(2x + \alpha)$ (5)

இங்கு $A = 5$, α ஆனது $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ஆகுமாறு உள்ள கர்ங்கோணம் (5)

$f(x) = \frac{5}{2}$

$5 \sin(2x + \alpha) = \frac{5}{2}$

$\sin(2x + \alpha) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ (5)

$2x + \alpha = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (5)

$x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$, இங்கு $n \in Z$

(5)

$f(x) = 5 \sin(2x + \alpha)$

$f(x)$ உயர்வு $= 5$; $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$

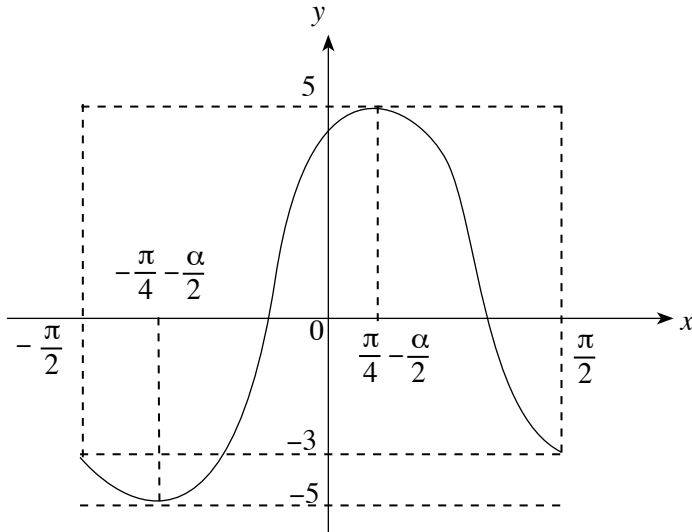
(5)

(5)

$f(x)$ இழிவு $= -5$; $x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ ($\alpha < \frac{\pi}{4}$ ஆகையால்)

(5)

(5)



(15)

க.பொ.த.(உ.த) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2016

இணைந்த கணிதம் - வினாத்தாள் II

விடைகளுக்கான வழிகாட்டல்

பகுதி A

1. m இற்கு $v^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$v^2 = 2gh$$

$$\therefore v = \sqrt{2gh}$$

(5)

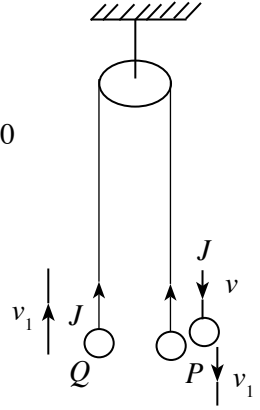
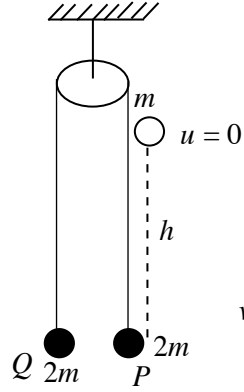
$I = \Delta(mv)$ ஐப் பிரயோகித்தல்

↓

P, m ஆகியவற்றிற்கு

$$-J = (2m + m)v_1 - mv - 2m \times 0$$

(1)



Q இற்கு

$$J = 2mv_1 - 0$$

(2)

(5)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$v_1 = \frac{v}{5} = \frac{\sqrt{2gh}}{5}$$

(5)

$$J = \frac{2m}{5} \sqrt{2gh}$$

(5)

25

2. ஒரு செக்கனில் வெளியேற்றப்படும் நீரின் கனவளவு

$$= 8 (0.005) \text{ m}^3$$

$$= 0.040 \text{ m}^3$$

(5)

ஒரு செக்கனில் வெளியேற்றப்படும் நீரின் திணிவு

$$= 10^3 \times 0.040 \text{ kg}$$

$$= 40 \text{ kg}$$

(5)

ஒரு செக்கனில் பம்பியின் மூலம் செய்யப்படும் வேலை = $mgh + \frac{1}{2} mv^2$

$$= (40 \times 10 \times 4) + \frac{1}{2} \times 40 \times 8^2$$

(5)

(5)

$$= 2880 \text{ js}^{-1}$$

$$= 2880 \text{ W}$$

(5)

$\therefore$ பம்பியின் வலு

25

5. $\underline{a} \perp \underline{b}$ ஆகையால் $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ (5)

$\therefore (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}) = 0$

$2\lambda + 3\mu = 0$ (1) (5)

$|\underline{b}| = 1$ ஆகையால் $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ (2) (5)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $\mu = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\mu > 0$ ஆகையால் $\mu = \frac{2}{\sqrt{13}}$ (5)

(1) இலிருந்து $\lambda = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ (5)

25

6. பொருள் எல்லைச் சந்தர்ப்பத்தில் இருக்கும் போதாகும்.
இலாமியின் தேற்றத்திலிருந்து

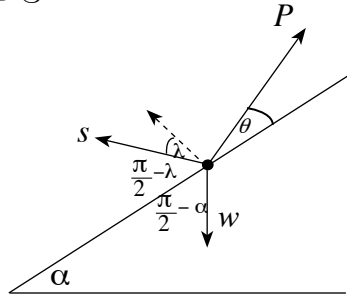
$\frac{P}{\sin[\pi - (\alpha + \lambda)]} = \frac{w}{\sin[\frac{\pi}{2} - (\theta - \lambda)]}$ (5)

$P = \frac{w \sin(\lambda + \alpha)}{\cos(\theta - \lambda)}$ (5)

P மிகச் சிறியதாக இருப்பதற்கு $\cos(\theta - \lambda)$
உயர்ந்தபட்சமாக இருத்தல் வேண்டும்

அதாவது $\theta = \lambda$

$\therefore P$ (மிகச் சிறியது) $= w \sin(\lambda + \alpha)$ (5)



(5)

25

7. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ எனக் கொள்வோம்.

$(A) \longrightarrow 1^{\text{st}}$ (முதலாம்) $(B) \longrightarrow 2^{\text{nd}}$ (இரண்டாம்)

(i) $X = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ (5)

ஆனால் $(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \phi$

$\therefore P(X) = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$= P(A) P(B') + P(A') P(B)$ (5)

$= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4} \times \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{12}$ (5)

(ii) $P(A|X) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{P(A) P(B')}{P(X)}$ (5)

$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$ (5)

($\because$ வெளிப்படை உண்மை III)

(சாராதது ஆகையால்)

$$\begin{aligned}
 8. \quad P(A \cap B^c) &= 0.2, \quad P(A^c \cap B) &= 0.1 & (5) \\
 P(A^c \cap B^c) &= P(A \cup B)^c &= 0.6 \\
 1 - P(A \cup B) &= 0.6 \\
 P(A \cup B) &= 0.4 & (5) \\
 P(A \cup B) - P(A \cap B) &= 0.2 + 0.1 \\
 \therefore P(A \cap B) &= 0.4 - 0.3 = 0.1 & (5) \\
 P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) & (5) \\
 0.1 + 0.1 &= P(B) & (5) \\
 \therefore P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2} & (5) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad \bar{x} &= 5, \quad s_x = 2 \\
 (i) \quad y_i &\in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\} \\
 y_i &= x_i + 10 \text{ எனக் கொள்வோம்} \\
 \text{இங்கு } x_i &\in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} & (5) \\
 \therefore \bar{y} &= \bar{x} + 10 = 5 + 10 = 15 \\
 s_y &= s_x = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad y_i &\in \{20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\} \\
 y_i &= 10x_i \text{ எனக் கொள்வோம்} \\
 \text{இங்கு } x_i &\in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} & (5) \\
 \therefore \bar{y} &= 10\bar{x} & (5) \\
 &= 10 \times 5 = 50 \\
 s_y &= 10s_x = 10 \times 2 = 20 & (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad y_i &= ax_i + b \text{ எனக் கொள்வோம்.} & (5) \\
 \text{அப்போது } \bar{y} &= a\bar{x} + b = 5a + b \\
 s_y^2 &= a^2 s_x^2 \\
 s_y &= |a| s_x & (5) \\
 &= 2|a|
 \end{aligned}$$

10.

u_i	-3	-2	-1	0	1	2
f_i	5	10	25	30	20	10
$f_i u_i$	-15	-20	-25	0	20	20

(5)

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = -\frac{20}{100} = -\frac{1}{5}$$

$$u_i = \frac{x_i - 35}{a}$$

(5)

$$\therefore \bar{x} = a\bar{u} + 35$$

$$33 = -\frac{a}{5} + 35$$

(5)

$$a = 10$$

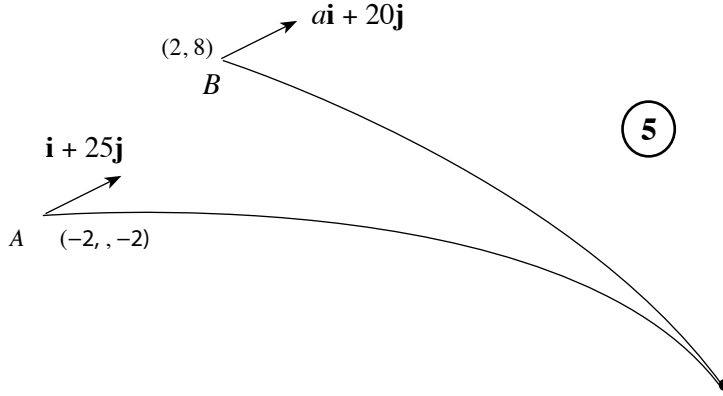
(5)

ஆயிடை	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
f_i	5	10	25	30	20	10

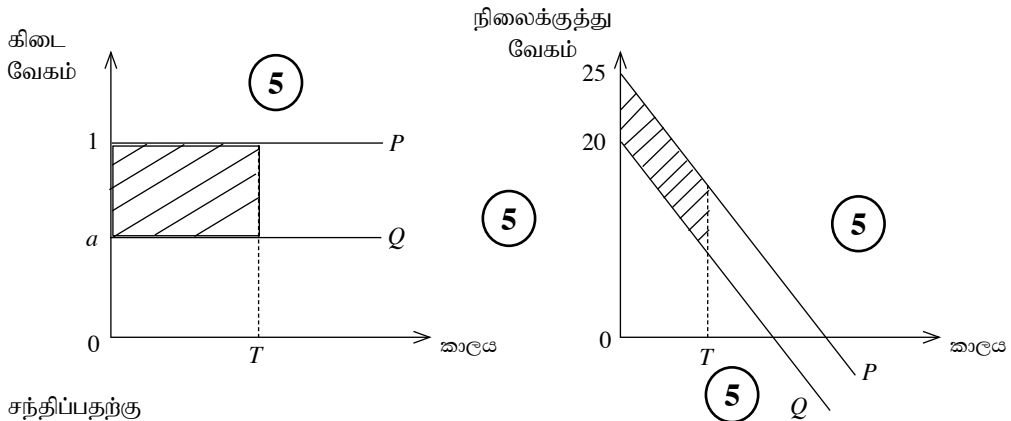
(5)

25

11. (a)



(5)



(5)

(5)

(5)

(5)

சந்திப்பதற்கு

P இன் நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சி = Q இன் நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சி + 10

P இன் நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சி - Q இன் நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சி = 10

(10)

$$T = 2$$

5

P இன் கிடை இடப்பெயர்ச்சி $- Q$ இன் நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சி $= 4$

(10)

5

5

60

$$v(P, S) = \alpha \quad v$$

5

போதவற்கு

$$\underline{v} (P, E)$$

$$+ \longrightarrow u \Rightarrow \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC_1}$$

5

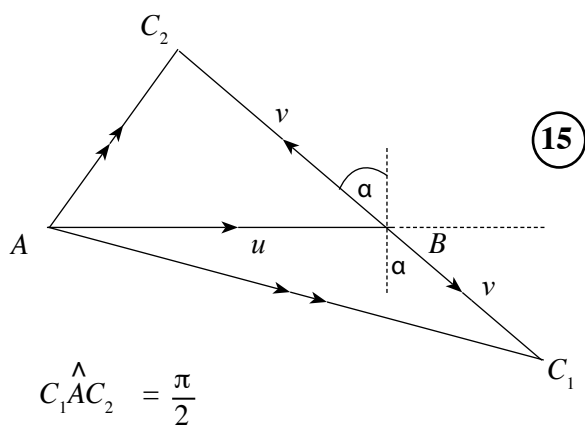
வருவதற்கு

$\underline{v}(P, E)$

A diagram showing a vector v originating from a point. A horizontal line and a vertical line form a right angle at the origin. The vector v points into the fourth quadrant. The angle between the horizontal line and the vector v is labeled α .

$$+ \longrightarrow u \Rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC},$$

5



15

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{\pi}{2}$$

C_1C_2 இன் நடுப் புள்ளி B ஆகையால்

(10)

$$B C_1 = B C_2 = B A = u$$

5

$$BAC_1^\wedge = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \quad BAC_2^\wedge = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

5

5

பயணத்திற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரம் t எனின்

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{S_1 I}{AC_1} + \frac{S_2 I}{AC_2} \\
 &= \frac{S_1 I \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{AC_1 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} + \frac{S_2 I \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{AC_2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} \\
 &= \frac{d}{v \cos \alpha} + \frac{d}{v \cos \alpha} = \frac{2d}{u \cos \alpha} \quad (\because v = u)
 \end{aligned}$$

90

12. (a) m இற்குச் சக்திக் காப்பு விதியினால்

$$\frac{1}{2} mu^2 - mga = mga \cos \theta + \frac{1}{2} mv^2 \quad (15)$$

$$v^2 - u^2 + 2ga(1 + \cos \theta) = 0 \quad (1) \quad (5)$$

m இற்கு $F = ma$ ஐப் பிரயோகிப்பதற்கு

$$R + mg \cos \theta = \frac{mv^2}{a} \quad (2)$$

(1) இலிருந்து (2) இற்குப் பிரதியிடும்போது

$$R + mg \cos \theta = \frac{m}{a} [u^2 - 2ga(1 + \cos \theta)]$$

$$R = \frac{mu^2}{a} - mg(2 + 3 \cos \theta)$$

OA மேன்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் α இல் ஆக இருக்கும்போது

துணிக்கை மேற்பரப்பிலிருந்து வெளியேறும் எனின் $R = 0$.

$$\therefore u^2 - 2ga - 3ga \cos \alpha = 0$$

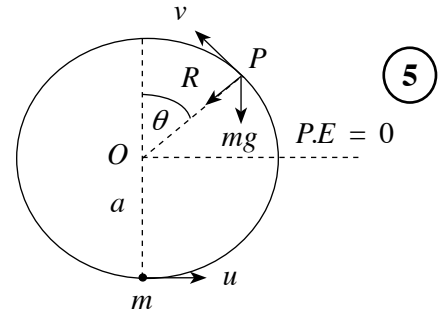
$$\cos \alpha = \frac{u^2 - 2ga}{3ga} > 0 \quad (\because u^2 > 2ga)$$

$\therefore \alpha$ ஒரு கூர்ங்கோணம்

மேலும் $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ஆகையால் $0 < \cos \alpha < 1$.

$$\frac{u^2 - 2ga}{3ga} < 1$$

$$u^2 < 5ga$$



திணிவு m மேற்பரப்பிலிருந்து $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{u^2 - 2ga}{3ga}$$

$$u^2 - 2ga = \sqrt{3} ga$$

$$u^2 = (2 + \sqrt{3}) ga$$

(5)

$$\text{அப்போது வேகம் } v^2 = u^2 - 2ga \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2ga + \sqrt{3} ga - 2ga - \frac{2ga}{\sqrt{3}} = \frac{ga}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

திணிவு m கோள மேற்பரப்பிலிருந்து வெளியேறிய பின்னர் எறிபடையாகச் செல்கின்றது.

பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் $a \sin \alpha$ கிடைத்தாரம் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் t_0 எனின்,

$$a \sin \alpha = (v \cos \alpha) t_0 \quad (5)$$

$$\text{அப்போது மேலே செல்லும் தூரம் } y = (v \sin \alpha) t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

$$y = \frac{v \sin \alpha \times a \sin \alpha}{v \cos \alpha} - \frac{1}{2} \frac{ga^2 \sin^2 \alpha}{v^2 \cos^2 \alpha} \quad (5)$$

$$= \frac{\frac{2}{3} a}{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{ga^2}{\frac{2ga}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} a$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$= -a \cos \alpha$$

(5)

திணிவு m ஆனது O இனுடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டைக் கடந்து செல்லும்போது $a \cos \alpha$ தூரம் சென்றிருக்கும் ஆகையால் அது கோளத்தின் O மையத்தினுடாகச் செல்கின்றது.

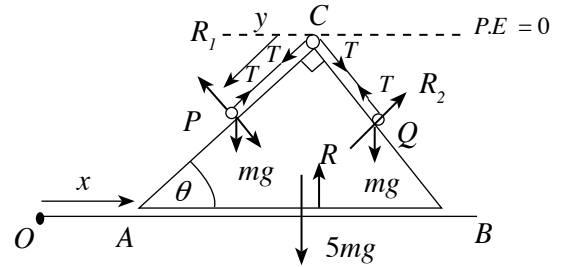
80

(b)

$$\mathbf{v}(P, O) = \begin{matrix} \dot{y} \\ \theta \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \end{matrix}$$

$$\mathbf{v}(Q, O) = \begin{matrix} +\dot{y} \\ \frac{\pi}{2} - \theta \\ -2 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ \end{matrix}$$

(5)



தொகுதிக்காக உந்தக் காப்பு விதியைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\longrightarrow 5m \dot{x} + m(\dot{x} - \dot{y} \cos \theta) + m(\dot{x} - \dot{y} \sin \theta) = 0 \quad (10)$$

$$7m \dot{x} = m \dot{y} (\cos \theta + \sin \theta)$$

$$7\dot{x} = \dot{y} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) \quad (5)$$

$$5\dot{x} = \dot{y} \quad \text{—————} \quad (1)$$

20

தொகுதிக்குச் சக்திக் காப்பு விதியைப் பிரயோகிக்கும் போது

$$\frac{1}{2} 5m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \{(\dot{x} - \dot{y} \cos \theta)^2 + (\dot{y} \sin \theta)^2\} \quad (20)$$

$$+ \frac{1}{2} m \{(\dot{x} - \dot{y} \sin \theta)^2 + (\dot{y} \cos \theta)^2\} - mgy \sin \theta - mg(l - y) \cos \theta = \text{ஒரு மாறிலி}$$

$$5\dot{x}^2 + \{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y} \cos \theta\} + \{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y} \sin \theta\}$$

$$- 2gy \sin \theta + 2gy \cos \theta = \text{ஒரு மாறிலி} \quad (5)$$

$$7\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y} \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) - 2gy \frac{4}{5} + 2gy \frac{3}{5} = \text{ஒரு மாறிலி}$$

$$35\dot{x}^2 + 10\dot{y}^2 - 14\dot{x}\dot{y} - 2gy = \text{ஒரு மாறிலி} \quad \text{—————} \quad (2)$$

25

$$(1), (2) \text{ ஆகியவற்றிலிருந்து}$$

$$35\dot{x}^2 + 250\dot{x}^2 - 70\dot{x}^2 - 2gy = \text{ஒரு மாறிலி}$$

$$215\dot{x}^2 - 2gy = \text{ஒரு மாறிலி}$$

t ஐக் குறித்து வகையிடும்போது

$$430\dot{x} \cdot \ddot{x} - 2g\dot{y} = 0 \quad (5)$$

$$430\dot{x} \cdot \ddot{x} - 2g \cdot 5\dot{x} = 0 \quad (\because \dot{x} \neq 0) \quad (5)$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{g}{43}$$

P இற்கு $F = ma$ ஐயைப் பிரயோகிக்கும் போது

$$\text{—————} \quad \therefore mg \sin \theta - T = m(\ddot{y} - \ddot{x} \cos \theta) \quad (5)$$

$$T = mg \sin \theta - m(5\ddot{x} - \ddot{x} \cos \theta) \quad (5)$$

$$= mg \frac{4}{5} - m\ddot{x} \left(5 - \frac{3}{5} \right)$$

$$= \frac{4mg}{5} - m \cdot \frac{1}{43} g \cdot \frac{22}{5}$$

$$= \frac{2mg}{5} \left\{ 2 - \frac{11}{43} \right\}$$

$$= \frac{2mg}{5} \times \frac{75}{43}$$

$$= \frac{30mg}{43} \quad (5)$$

15

13. இழை இயற்கை நீளத்திலிருந்து x தூரம் இழுக்கப்படும்போது இழையின் இழுவை T எனின்,

$$T = \frac{\lambda x}{a} = \frac{2mgx}{a} \quad (5)$$

துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $F = ma$

$$mg \sin 30^\circ - T = m\ddot{x} \quad (10)$$

$$mg \times \frac{1}{2} - \frac{2\lambda g x}{a} = \lambda \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{2g}{a} \left(x - \frac{a}{4}\right) \quad (1) \quad (5)$$

$$x = \frac{a}{4} + A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2)$$

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (3) \quad (5)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \quad (4) \quad (5)$$

$$= -\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \left(x - \frac{a}{4}\right) \quad (5) \quad (2) \text{ இருந்து } (5)$$

$$(1), (5) \text{ ஆகியவற்றைக் கருதும் போது } \omega^2 = \frac{2g}{a} \quad (5)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

$$t = 0 \text{ ஆக இருக்கும் போது } \dot{x} = 0. \quad (5)$$

$$(3) \text{ இலிருந்து } 0 = B\omega$$

$$\omega \neq 0 \text{ ஆகையால் } B = 0. \quad (5)$$

$$t = 0 \text{ ஆக இருக்கும்போது } x = a. \quad (5)$$

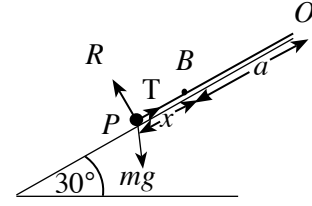
$$(2) \text{ இலிருந்து } a - \frac{a}{4} = A \Rightarrow A = \frac{3a}{4} \quad (5)$$

$$\therefore x = \frac{3a}{4} \cos \omega t + \frac{a}{4}$$

$$x - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t$$

$$\text{துணிக்கையின் அலைவு மையம் } x - \frac{a}{4} = 0 \text{ கிடைக்கின்றது.} \quad (5)$$

$$\text{அதாவது } x = \frac{a}{4} \text{ அலைவு மையமாகும்.} \quad (5)$$



20

40

10

வீச்சத்தில் $\dot{x} = 0$ அப்போது $t = t_1$ எனக் கொள்வோம்.

$$0 = -A\omega \sin \omega t_1 \quad (5)$$

$$\sin \omega t_1 = 0$$

$$\omega t_1 = n\pi ; n \in \mathbb{Z}_0^+ \quad (5)$$

$$x - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t_1$$

$$x - \frac{a}{4} = \pm \frac{3a}{4} \quad (5)$$

20

$$\therefore \text{துணிக்கையின் எளிய இசை இயக்கத்தின் வீச்சம்} = \frac{3a}{4} \quad (5)$$

துணிக்கை முதலில் இயற்கை நீளத்திற்கு வரும்போது அதன் வேகம் V எனக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்போது } x = 0. \quad (5)$$

$$\frac{3a}{4} \cos \omega t = -\frac{a}{4}$$

$$\cos \omega t = -\frac{1}{3} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} V &= -A\omega \sin \omega t \\ &= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} \\ &= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \sqrt{\frac{8}{9}} \quad (5) = -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= -\sqrt{ag} \end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ ஆக இருக்கும்போது வேகம் } \uparrow \sqrt{ag} \text{ வீ.} \quad (5)$$

20

துணிக்கை முதலில் இயற்கை நீளத்திற்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரம் t_0 எனக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்போது } x = 0. \quad (5)$$

$$-\frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t_0$$

$$\cos \omega t_0 = -\frac{1}{3} \quad (5)$$

$$\omega t_0 = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \left[\pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] = \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[\pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] \quad (5)$$

துணிக்கை O வரைக்கும் புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்குகின்றது.

B இலிருந்து O வரைக்கும் செல்வதற்கான நேரம் t_2 எனின்

$$S = ut + \frac{1}{2} at^2 \quad \uparrow$$

$$S = a, u = \sqrt{ag}, a = -g \sin 30^\circ$$

$$a = \sqrt{ag}t_2 - \frac{1}{2} \frac{g}{2} t_2^2 \quad (5)$$

$$\frac{g}{4} t_2^2 - \sqrt{ag} t_2 + a = 0$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{ag} \pm \sqrt{ag - 4 \frac{g}{4} a}}{\frac{g}{2}}$$

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$

$\therefore O$ வரைக்கும் செல்வதற்கான நேரம் $t_0 + t_2$

$$= \sqrt{\frac{a}{2g}} (\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3})) + 2\sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3}) + 2\sqrt{2} \right]$$

30

இழை புள்ளி A இல் உயர்ந்தபட்ச நீளத்தில் உள்ளது. அதாவது

$x = a$ ஆக இருக்கும்போது

10

$$T_A = \frac{\lambda a}{a} \quad (5)$$

$$= \lambda$$

$$14. (a) (i) |\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1 \quad (5)$$

$(\underline{a} + 2\underline{b}) \perp (5\underline{a} - 4\underline{b})$ எனின்

$$(\underline{a} + 2\underline{b}) \cdot (5\underline{a} - 4\underline{b}) = 0 \quad (5)$$

$$5\underline{a} \cdot \underline{a} + 10\underline{b} \cdot \underline{a} - 4\underline{a} \cdot \underline{b} - 8\underline{b} \cdot \underline{b} = 0$$

$$5|\underline{a}|^2 + 10\underline{a} \cdot \underline{b} - 4\underline{a} \cdot \underline{b} - 8|\underline{b}|^2 = 0$$

$$5 + 6\underline{a} \cdot \underline{b} - 8 = 0$$

$$6\underline{a} \cdot \underline{b} = 3 \quad (5)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \frac{1}{2}$$

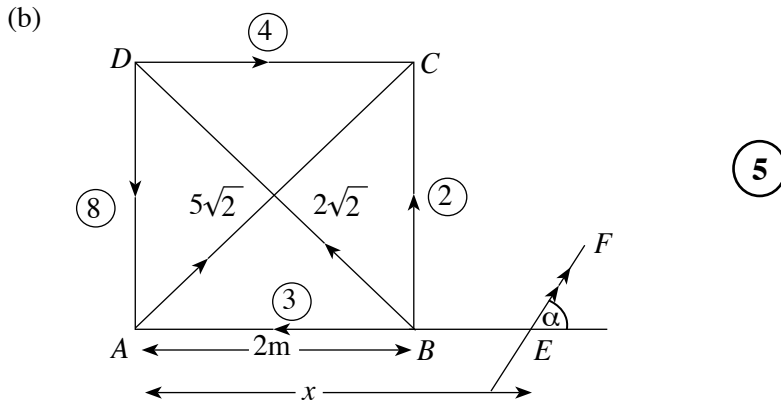
$$|\underline{a}| |\underline{b}| \cos \theta = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$1 \times 1 \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \quad (5)$$

25

(ii) $|a-b|^2 + |b-c|^2 + |c-a|^2$
 $= (a-b) \cdot (a-b) + (b-c) \cdot (b-c) + (c-a) \cdot (c-a)$ (5)
 $= |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 + |c|^2 - 2b \cdot c + |c|^2 + |a|^2 - 2c \cdot a$ (5)
 $= 6 - 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$ (5)
 $\therefore 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 6 - (|a-b|^2 + |b-c|^2 + |c-a|^2)$ (5) (1)
 $|a+b+c|^2 \geq 0$ (5)
 $\therefore (a+b+c) \cdot (a+b+c) \geq 0$ (5)
 $|a|^2 + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot a + |b|^2 + b \cdot c + c \cdot a + c \cdot b + |c|^2 \geq 0$ (5)
 $3 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) \geq 0$ — (2) (5)
 (1) , (2) ஆகியவற்றிலிருந்து
 $3 + 6 - (|a-b|^2 + |b-c|^2 + |c-a|^2) \geq 0$ (5)
 $\therefore |a-b|^2 + |b-c|^2 + |c-a|^2 \leq 9$ (5)

50



(i) $\vec{X} = 4 - 3 + 5\sqrt{2} \cos 45^\circ - 2\sqrt{2} \cos 45^\circ$ (5)
 $= 4N$
 $\uparrow Y = 2 - 8 + 5\sqrt{2} \cos 45^\circ + 2\sqrt{2} \cos 45^\circ$ (5)
 $= 1N$
 வினையுள் R எனின்,
 $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{4^2 + 1^2}$
 $= \sqrt{17} N$ (5)
 வினையுள் கிடைப்புடன் ஆக்கும் கோணம் α எனின்,
 $\tan \alpha = \frac{1}{4}$
 $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \right)$ (5)

25

வினையுளின் தாக்கக் கோடு AB ஐ வெட்டும் புள்ளி E எனின், $AE = x$ எனக் கொள்வோம்.

$$\curvearrowleft A \quad 1 \times x = 2 \times 2 - 4 \times 2 + 2\sqrt{2} \cdot 2 \cos 45^\circ \quad (5)$$

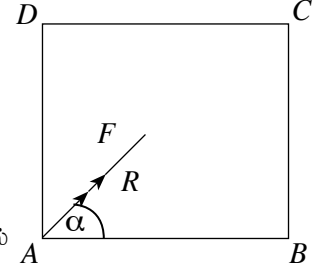
$$x = 0 \quad (5)$$

$A \equiv E$ (பொருந்தும்)

விளைவுகளின் தாக்கக் கோடு A இனாடாகச் செல்கின்றது.

$\therefore$ விசைத் தொகுதி சமநிலைப்படுவதற்கு $\sqrt{17} \text{ N}$ விசை $\vec{FA}$ திசையில்

A இல் பிரயோகிக்கப்படுதல் வேண்டும். (5) (5)



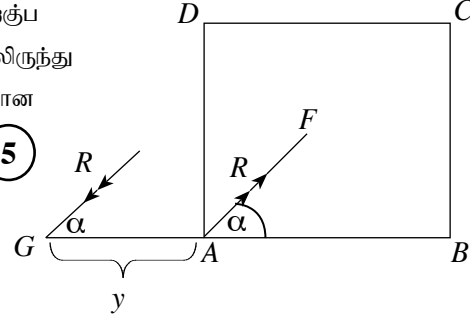
20

- (ii) ABC போக்கில் ஒரு 39 Nm இணையாக ஒடுக்குவதற்குப் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசை நீட்டிய BA மீது A இலிருந்து y தூரத்தில் AF இற்குச் சமாந்தரமாக $\vec{FA}$ திசையிலான $\sqrt{17} \text{ N}$ விசை தாக்குகின்றதெனக் கொள்வோம். (5)

$$\curvearrowleft ABC \quad \sqrt{17} \times AG \sin \alpha = 39 \quad (5)$$

$$\sqrt{17} \times AG \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 39$$

$$AG = 39 \text{ m} \quad (5)$$



15

- (iii) B இல் ஒரு தனி விசையாக ஒழுக்குவதற்குச் சேர்க்க வேண்டிய திருப்பம் (5)

$$= \curvearrowleft \sqrt{17} \times BA \sin \alpha \quad (5)$$

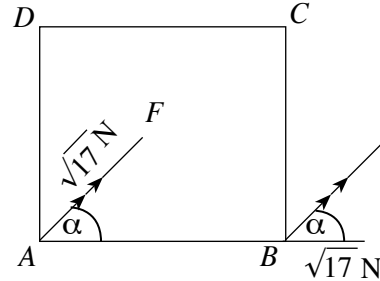
$$= \curvearrowleft \sqrt{17} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 2 \text{ Nm} \quad (5)$$

Aliter

சேர்க்க வேண்டிய திருப்பம் M எனின்,

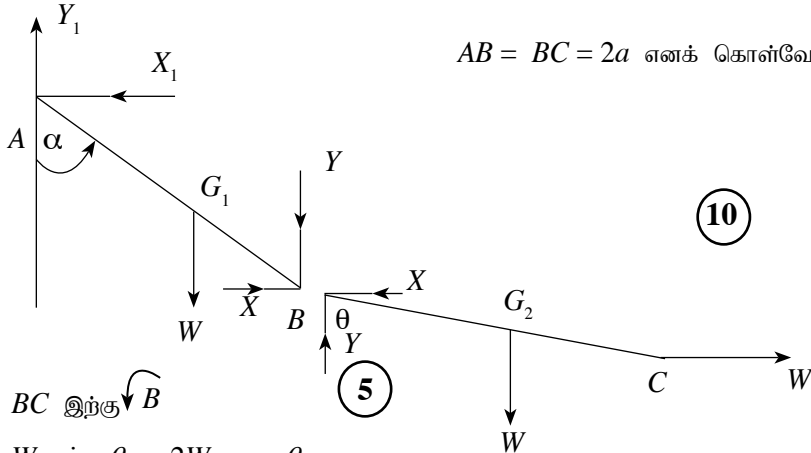
$$M - \sqrt{17} \times 2 \sin \alpha = 0$$

$$M = \sqrt{17} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 2 \text{ Nm}$$



15

15. (a)



$AB = BC = 2a$ எனக் கொள்வோம்.

- (i) BC இற்கு $\curvearrowleft B$

$$W a \sin \theta = 2 W a \cos \theta$$

$$\tan \theta = 2 \quad (5)$$

10

10

பகுதி BC இன் நாப்பத்தைக் கருதும்போது

$$\leftarrow X = W \quad (5)$$

$$\uparrow \quad Y = W \quad \textcircled{5}$$

$$\therefore R_B = \sqrt{W^2 + W^2} \quad (5)$$

$$= \sqrt{2} W$$

20

R_B இன் திசை கிடையுடன் $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ கோணத்தை ஆக்குகின்றது. 5

AB இற்கு $\downarrow A$

$$X. 2 \cos \alpha = W \sin \alpha + y. 2 \sin \alpha \quad (10)$$

$$W \cdot 2 \cos \alpha = W \sin \alpha + W \cdot 2 \sin \alpha$$

$$\frac{2}{3} = \tan \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \quad \textcircled{5}$$

15

AB இன் நாப்பக்கத்தைக் கருதும்போது

$$\longrightarrow X_1 = X = W \quad (5)$$

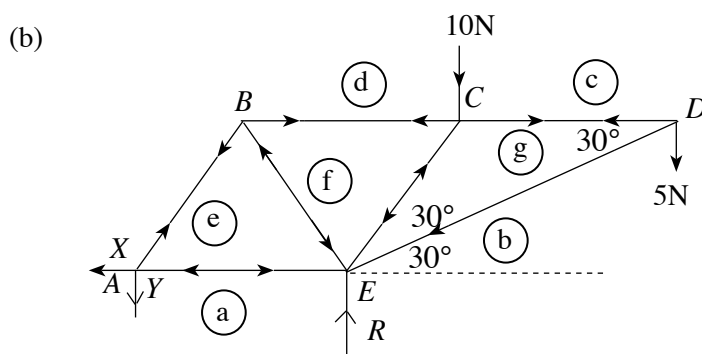
$$\uparrow \quad Y_1 = 2W \quad \textcircled{5}$$

$$\therefore R_A = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = \sqrt{5} W \quad (5)$$

R_A இன் திசை கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம்

$$= \tan^{-1}(2) \quad \textcircled{5}$$

20



ஒரு கோலின் நீளம் $2a$ எனக் கொள்வோம் (DE தவிர)

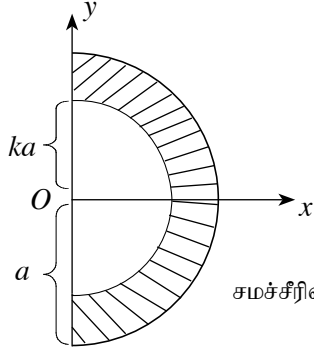
(i)  தொகுதியைக் கருதி

$$R 2x - 10 \times 3x - 5 \times 5x = 0 \quad (5)$$

$$R = \frac{55}{2} \text{ N } \textcircled{5}$$

$\therefore E$ இல் பிரயோகிக்கப்படும் நிலைக்குத்து விசை $= \frac{55}{2}$

(a)



சமச்சீரினால் திணிவு மையம் Ox மீது உள்ளது.

பொருள்	திணிவு	O இலிருந்து திணிவு மையத்திற்கு உள்ள தூரம்
அரைக்கோளம்	$\frac{2}{3} \pi a^3 \rho$	$\frac{3a}{8}$
அகற்றிய அரைக்கோளம்	$\frac{2}{3} \pi (ka)^3 \rho$	$\frac{3ka}{8}$
எஞ்சிய பகுதி	$\frac{2}{3} \pi a^3 \rho (1 - k^3)$	$\bar{x}$

(10)

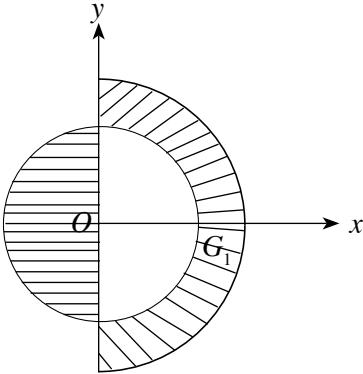
(5)

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{3a}{8} - \frac{2}{3} \pi k^3 a^3 \rho \frac{3ka}{8}}{\frac{2}{3} \pi a^3 \rho (1 - k^3)} \quad (15)$$

$$= \frac{\frac{3a}{8} (1 - k^4)}{(1 - k^3)} = \frac{3a (1 + k^2) (1 - k) (1 + k)}{8 (1 - k) (1 + k + k^2)} = \frac{3a (1 + k^2) (1 + k)}{8 (1 + k + k^2)} \quad (10)$$

40

(b) திணிவு மையம் $G_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ எனக் கொள்வோம். அகற்றிய பகுதியை உருவில் உள்ளவாறு இணைக்கும்போதும் Ox பற்றிச் சமச்சீரானது ஆகையால் $\bar{y}_1 = 0$. (5)



(i) அகற்றிய பகுதியின் திணிவு m எனவும் ஆரை a ஐ உடைய அரைக்கோளத்தின் திணிவு M எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{m}{M} = \frac{\frac{2\pi}{3} k^3 a^3 \rho}{\frac{2\pi}{3} a^3 \rho} = k^3 \quad (5)$$

$$m = Mk^3$$

(ii) சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையத்திற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் $\bar{x}_1$ ஆகும்

$$\bar{x}_1 = \frac{(M - m) \bar{x} + m \left(-\frac{3}{8} ka\right)}{(M - m) + m} \quad (15)$$

$$\text{மேலும் } (M - m) \bar{x} = M \left(\frac{3a}{8}\right) - m \left(\frac{3ka}{8}\right) \text{ ஆகையால்} \quad (5)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{M \left(\frac{3a}{8}\right) - m \left(\frac{3ka}{8}\right) - m \left(\frac{3ka}{8}\right)}{M}$$

$$= \frac{3a}{8} \frac{(M - 2mk)}{M}$$

$$= \frac{3a}{8} \left(1 - \frac{2m}{M} k\right) \quad (10)$$

$$\text{சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையத்திற்கு } O \text{ இலிருந்து உள்ள தூரம்} = \frac{3a}{8} (1 - 2k^4)$$

30

(iii) திணிவு மையம் G_1 ஆனது O உடன் பொருந்த வேண்டும்.

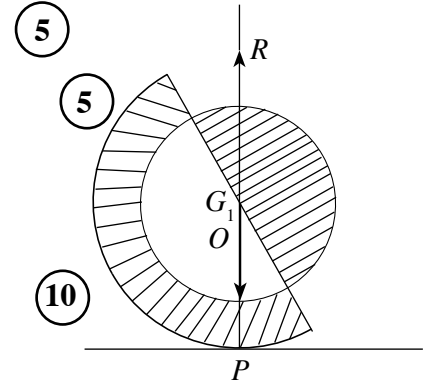
அதாவது $\bar{x}_1 = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\frac{3a}{8} (1 - 2k^4) = 0 \quad (5)$$

$$2k^4 = 1$$

$$k^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$k^2 > 0 \text{ ஆகையால் } k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



30

17. (a) $P(A) = 0.1$, $P(A \cup B) = 0.37$ ஃ $P(C) = 0.2$

$$(i) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad (5)$$

(A, B ஆகியன சாராதன ஆகையால்)

$$0.37 = 0.1 + P(B) - 0.1 P(B) \quad (5)$$

$$0.37 - 0.1 = 0.9 P(B) \quad (5)$$

$$0.3 = P(B) \quad (5)$$

15

$$(ii) P(B' | A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} \quad (5)$$

$$\text{இங்கு } P(B' \cap A') = P[(B \cup A)'] = 1 - P(A \cup B) \quad (5)$$

$$= 1 - 0.37 = 0.63$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9 \quad (5)$$

$$\therefore P(B' | A') = \frac{0.63}{0.9} = 0.7 \quad (5)$$

20

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad P(A' \cap B' \cap C) &= P(A') P(B') P(C) \quad (5) \\ &= 0.9 \times 0.7 \times 0.2 \\ &= 0.126 \quad (5) \end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad X &: (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \quad (5) \\ P(X) &= P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) \\ &= P(A) P(B') P(C') + P(A') P(B) P(C') + P(A') P(B') P(C) \quad (5) \\ &= 0.1 \times 0.7 \times 0.8 + 0.9 \times 0.3 \times 0.8 + 0.9 \times 0.7 \times 0.2 \quad (10) \\ &= 0.398 \end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A | X) &= \frac{P(A \cap X)}{P(X)} \\ &= \frac{P(A \cap B' \cap C')}{P(X)} \quad (5) \\ &= \frac{0.1 \times 0.7 \times 0.8}{0.398} \\ &= \frac{56}{398} \quad (5) \\ &= \frac{28}{199} \end{aligned}$$

10

$$\text{(b) (i) } (\alpha) \text{ இடை} = \frac{\sum_{r=1}^n x_r}{n} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{புள்ளிகளின் இடை} \quad \bar{x} &= \frac{28 + 56 + 23 + 94 + 8 + 5 + 13 + 846}{28} \quad (5) \\ &= \frac{1073}{28} \\ &= 38.32 \quad (5) \end{aligned}$$

15

(β) 94 இலிருந்து 49 புள்ளிகள் வரைக்கும் குறைந்திருப்பதனால் வித்தியாசம் - 45 ஆகும். (5)
05 இலிருந்து 50 புள்ளிகள் வரைக்கும் அதிகரித்திருப்பதனால் வித்தியாசம் + 45 ஆகும்.
∴ இடை மாறுவதில்லை. (5)

$$\text{நியம விலகல்} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{மாற்றற்றன்} &= s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} \quad (5) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum x_i}{n} + \bar{x}^2 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \quad (5) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{20}\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{10}\}$ எனக் கொள்வோம்

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 320 \quad , \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 5840 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 130 \quad , \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 2380 \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{320}{20} = 16 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2}{20} - 16^2 = \frac{5840}{20} - 16^2 \\ &= 292 - 256 = 36 \end{aligned}$$

$$\therefore s_x = 6 \quad (5)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = \frac{130}{10} = 13 \quad (5)$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i^2}{10} - 13^2 = \frac{2380}{10} - 169 = 69$$

$$\therefore s_y = 8.30 \quad (5)$$

$Z = X \cup Y$ எனக் கொள்வோம்

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i + \sum_{i=1}^{10} y_i}{30} \\ &= \frac{320 + 130}{30} = 15 \quad (5) \end{aligned}$$

$$s_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 + \sum_{i=1}^{10} y_i^2}{30} - \bar{z}^2 \quad (5)$$

$$= 274 - 225 = 49$$

$$s_z = 7 \quad (5)$$

60
