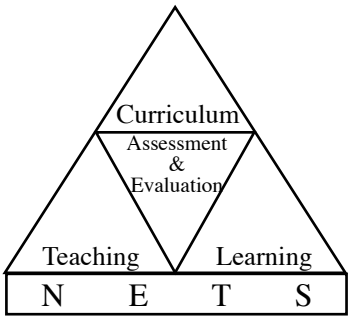
க.பொ.த. (உ.தர)ப் பரீட்சை - 2016

Marking Scheme

10 - இணைந்த கணிதம்



ஆய்வு அபிவிருத்திக் கிளை
தேசிய மதிப்பீட்டிற்கும் பரீட்சித்தலுக்குமான சேவை
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

2.1.3 I ஆவது வினாத்தாளில் ஒவ்வொரு வினாக்கள் அவற்றிற்கு எதிர்பார்க்கப்பட்ட விடைகள், புள்ளி வழங்கும் திட்டம், விடையளித்தல் தொடர்பான அவதானிப்புகளும் ஆலோசனைகளும்

10 - இணைந்த கணிதம் வினாத்தாள் I பகுதி A

1 ஆம் வினா

1. **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ என நிறுவுக.

$n = 1$ ஆக. $= \sum_{r=1}^{1} r(r+1) = 2$ மற்றும்

வ.கை.ப $= \frac{1}{3}(1+1)(1+2) = 2.$ **5**

எனவே, $n = 1$, இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$n = 1$ க்கு முடிவு உண்மை என்க. இங்கு $n \in \mathbb{Z}^+$

அதாவது $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ **5**

எனவே $\sum_{r=1}^{p+1} r(r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(r+1) + (p+1)\left[(p+1)+1\right]$ **5**

$$= \frac{p}{3}(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2)$$

$$= \frac{(p+1)}{3}(p+2)(p+3). \quad \textbf{5}$$

இதிலிருந்த, $n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனின், $n = p+1$ இற்கும் முடிவு உண்மையாகும். $n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மை என நிறுவப்பட்டது. ஆகவே கணிதத்தொகுத்தறி முறைப்படி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் முடிவு உண்மையாகும். **5**

25

---

1 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

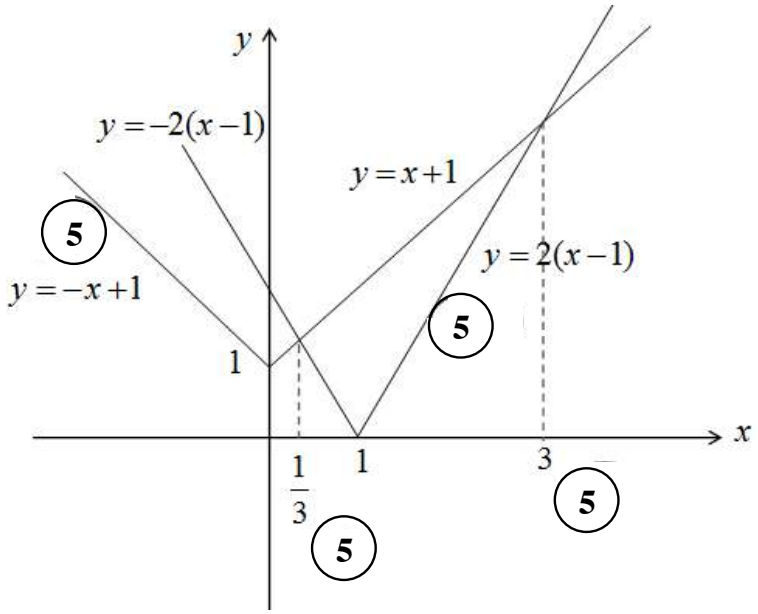
இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுதுவதற்கு முயற்சித்தோர் 97% மட்டுமேயாகும். கணித தொகுத்தறி கோட்பாடுகளை சரியாகப் பயன்படுத்துதல் இந்த வினாவில் எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 53% ஆகும்.

$n=p\ ; p \in Z^+$ இற்கு எடுகோளாக $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ என எழுத வேண்டியிருப்பினும் $\sum_{r=1}^{p} p(p+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ என தவறுதலாக எழுதியிருந்தமையால் அதிகளவிலானோருக்கு அந்தப் படிமுறைக்காக புள்ளிகளைப் பெற்றுக்கொள்வதற்கு முடியாது இருந்தது. அவ்வாறே $n=p+1$ இற்கான காரணி சரியாக இல்லை.

கணித தொகுத்தறி கோட்பாட்டின் படிமுறைகள் உறுதி செய்யும் வகையில் பயிற்சிகளில் ஈடுபடுவதன் மூலம் அந்த பின்னடைவை இல்லாது செய்வதற்கு மாணவர்களை ஊக்கப்படுத்த வேண்டும்.

2 ஆம் வினா

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y = |x| + 1$, $y = 2|x - 1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக,** சமனிலி $|x| + 1 > 2|x - 1|$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



வரிப்படத்திலிருந்து $|x|+1>2|x-1| \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3.$ **5** **25**

மாற்று முறை I

வகை **(i)**, $\boxed{x \geq 1}\ x+1>2(x-1) \Leftrightarrow x<3$ **5**

எனவே இவ்வகையில் $1 \leq x < 3$ என்பது x இற்கான தீர்வாகும்.

வகை **(ii)**, $\boxed{0<x<1}\ x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}.$ **5**

எனவே இவ்வகையில் $\frac{1}{3}<x<1.$ என்பது x இற்கான தீர்வாகும்.

வகை **(iii)** $\boxed{x \leq 0}\ -x+1>-2(x-1) \Leftrightarrow x>1$

இது முரண்பாடானது. எனவே இவ்வகையில் தீர்வுகள் இல்லை.

எனவே, $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3}<x<3\right\}$ என்பது தீர்வுத் தொடையாகும். **5** **15**

மாற்று முறை II

$|x|+1>2|x-1|$

$\Leftrightarrow x^2+2|x|+1>4(x^2-2x+1)$

$\Leftrightarrow 3x^2-2(|x|+4x)+3<0$

$\boxed{x>0}$

$3x^2-10x+3<0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x-3)<0$ **5**

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$ **5**

$\boxed{x<0}$

$3x^2-6x+3<0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2<0$ **5**

இது சாத்தியமில்லை.

15

---

2 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான முழுமையான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 94% இனர் மட்டுமேயாகும். இந்த வினாவினால் மட்டு உள்ளடக்கப்பட்ட சார்பின் வரைபுகளின் பருமட்டான படத்தை வரைதல் மிகவும் இலகுவானதுடன் அம்முறை மூலமோ அல்லது வேறு முறையிலோ அதன் தீர்வைக்காண எதிர்பார்த்ததுடன் அதன் இலகுதன்மை 43% மட்டுமேயாகும்.

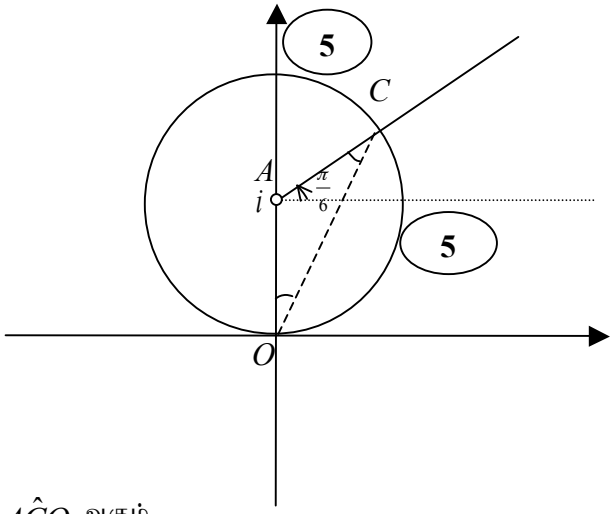
அந்த வரைபுகளின் இடது பக்கத்திலே சமாந்தரமாக கீறுவதனால் முழுப் புள்ளிகளையும் பெற முடியாது இருந்தது. மட்டு உள்ளடக்கப்பட்ட சமனிலையை சரியாக உறுதி செய்யுமாறான பயிற்சிகளில் பல முறைகளின் கீழே மாணவர்களைத் தொடர்ந்து செய்விப்பதினூடாக இத்தகைய வினாவிற்கு விடையளிப்பதை இலகுவில் மேற்கொள்ள முடியும்.

3 ஆம் வினா

3. ஒரே ஆகண் வரிப்படத்தில்

(i) $|z - i| = 1$, (ii) $\text{Arg}\,(z - i) = \frac{\pi}{6}$

ஆகியவற்றைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்குகளைப் பரும்படியாக வரைந்து. இவ்வொழுக்குகளின் வெட்டுப் புள்ளியினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணை வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இற் காண்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.



$O\hat{A}C = \frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

$OA = AC$, என்பதால் $A\hat{O}C = A\hat{C}O$ ஆகும்.

எனவே, $A\hat{O}C = \frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

ஆகவே, OC ஆனது நேர் x- அச்சுடன் அமைக்கும் கோணம் $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. (5)

எனவே, தேவையான சிக்கல் எண் $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. (5)

25

மாற்று முறை :

$y_C = 1 + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$ (5)

$x_C = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5)

$\therefore z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (5)

ஆகவே $r = \sqrt{3}$ உம் $\theta = \frac{\pi}{3}$ உம் ஆகும்.

15

3 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 81% மட்டுமேயாகும். சிக்கலெண்களின் ஒழுக்குகள் தொடர்பான தலைப்பின்கீழ் முன்வைக்கப்பட்டதுடன் ஒழுக்கின் இடைவெட்டு புள்ளிகளை முனையாள்கூறுகளில் காண்பதற்கு எதிர் பார்க்கப்பட்டதுடன் அதன் இலகுதன்மை 18% ஆகும். ஆகண் வரிப்படத்தில் $|z - i| = 1$ இனைக் காட்டும்போது, $Arg(z - i) = \lambda/6$ ஐக் காட்டும்போது அந்த ஒழுக்கு அரைவாசி கோட்டினால் காட்டப்பட வேண்டும் எனவும் $(0,1)$ என்ற புள்ளிக்குரியதாக அமையாது என்பதையும் அறியாமையினால் புள்ளியைப் பெற முடியாது போனது. ஒழுக்குகள் அடங்கிய பல்வேறு வடிவிலே பிரச்சினை தீர்ப்பதற்கு மாணவர்களை ஈடுபடுத்துவதன் மூலம் புள்ளி மட்டத்தைக் கூட்ட முடியும்.

4 ஆம் வினா

4. ஒவ்வோர் இலக்கமும் ஒரு தடவை மாத்திரம் பயன்படுத்தப்பட்டால், 1,2,3,4,5 என்னும் இலக்கங்களிலிருந்து ஐந்து இலக்கங்களைக் கொண்ட எத்தனை வெவ்வேறு எண்களை ஆக்கலாம் ?
இவ்வெண்களில் (i) எத்தனை இரட்டை எண்கள் உள்ளன ?
(ii) எத்தனையில் 3, 4 ஆகிய இலக்கங்கள் அடுத்தடுத்து உள்ளன ?

5 4 3 2 1

தேவையான விடை = 5! **5**

= 120. **5**

(i) தேவையான விடை 2 அல்லது 4 ஆக இருக்க வேண்டும்.

தேவையான விடை = $2 \times 4! = 48$ **5**

5

(ii) 3 4 ஒன்றாகவும் அதே ஒழுங்கிலும் இருக்கும்போது

தேவையான வழிகளின் எண்ணிக்கை = 4!

(i) 4 3 ஒன்றாகவும் அதே ஒழுங்கிலும் இருக்கும்போது

மீண்டும் தேவையான வழிகளின் எண்ணிக்கை 4!

தேவையான விடை = $2 \times 4! = 48$

5

25

---

4 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 91% இனர் மட்டுமேயாகும். வரிசை மாற்றமும் சேர்மானமும் எனும் தலைப்பின் கீழே இந்த பிரச்சினை முன்வைக்கப்பட்டுள்ளதுடன் அதன் இலகுதன்மை 48% ஆகும். பிரசினத்தில் முதலாம் பகுதியை விளங்கிக் கொள்வது பொதுவான மட்டத்திலே காணப்படுவதுடன் இரண்டாம் பகுதியிலே வரிசை மாற்றம் அறிவு குறைவானமையினால் இறுதி விடையை சரியாகப் பெறுவதில் குறைபாடுகள் இருந்தன.

ஒன்றிற்கொன்று வேறுபட்ட பிரசினங்களை வாசித்து விளங்கிக் கொண்டு தீர்ப்பதற்கு மாணவர்களைப் பயிற்றுவிப்பதன் மூலம் இந்தக் குறைபாட்டை இல்லாது செய்ய முடியும்.

5 ஆம் வினா

5. $\alpha > 0$ எனக் கொள்வோம். $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}} = 16$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக α இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

(5)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\alpha x}{(1+\cos(\alpha x))}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}$$

(5)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\alpha x}{2x^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right)^2\times\frac{\alpha^2}{2}\times\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{(1+\cos(\alpha x))}$$

(5)

$$= 1^2\cdot\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{4}{2} = \alpha^2$$ (5)

$$\therefore \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \ (\because \alpha > 0)$$

(5)

25

மாற்றுமுறை:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\alpha x)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}$$

(5)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}\times\frac{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)}$$

(5)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{x^2}\cdot\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\frac{\alpha x}{2}}\right)^2\times\frac{\alpha^2}{4}\times\left(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)$$

(5)

$$= 1^2\cdot\frac{\alpha^2}{4}\cdot 4 = \alpha^2$$ (5)

$$\therefore \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \quad (\because \alpha > 0)$$

(5)

25

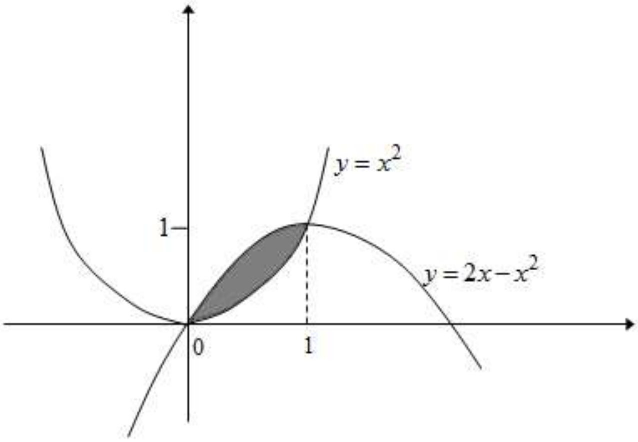
5 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 93% இனர் மட்டுமேயாகும். வரைபின் எல்லைகளைக் காண்பதற்குரிய இந்தப் பிரசினம் முன்வைக்கப்பட்டுள்ளதுடன் அதன் இலகுதன்மை 46% மட்டுமேயாகும். தரப்பட்ட வளையியின் எல்லையைக் காண்பதற்கு முடியுமான வகையில் மாற்றுவதற்கு உரிய விளக்கம் தெளிவான மட்டத்தில் இருந்தாலும் அட்சரகணிதக் கூற்றை சுருக்குவதில் வழுக்கள் இருத்தல் மற்றும் திரிகோணகணித சூத்திரம் தொடர்பான நினைவு போதாமையினால் இவ்வாறு புள்ளிகள் குறைவதற்குக் காரணமாகும்.

இறுதி விடையைப் பெற்ற மாணவர்களும் தேவையான தேற்றங்களை பயன்படுத்தி சரியான முறையில் காட்டாமையினால் புள்ளிகள் குறைவதற்கு காரணமாக அமைந்தது. திரிகோண கணித சூத்திரங்களை மனனஞ் செய்தல், அட்சர கணித கூற்றுகளைச் சுருக்குவதற்குப் பயிற்றுவித்தல் மூலம் இந்தப் பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

6 ஆம் வினா

6. $y = x^2,\ y = 2x - x^2$ **என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு** $\frac{1}{3}$ **சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.**



இடைவெட்டும் புள்ளிகளில் : $x^2 = 2x - x^2$

$x(x-1) = 0$

$x = 0$ or $x = 1$.

தேவையான பரப்பு $= \int_0^1 \left[(2x - x^2) - x^2\right] dx$ (15)

$= 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$

$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$ (5)

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$ (5)

$= \frac{1}{3}$ சதுர அலகுகள் **25**

---

6 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 88% இனர் மட்டுமேயாகும். இருபடிச் சார்புகளின் பரும்படியான படங்களைக் கீறுதல், மற்றும் அந்த வளையிகளுக்கிடையிலான பரப்பளவுகளை காண்பதற்குரிய இந்த வினா முன்வைக்கப்பட்டுள்ளதுடன் அதன் இலகுதன்மை 38% ஆகும். இருபடி வளையிகளை பரும்படியாகக் கீறாது விடையைப் பெற்றமை வளைவுகளின் இடைவெட்டு புள்ளிகளை இனங்காண சிரமமானதால் புள்ளிகள் குறைவடைவதற்கு காரணமாக அமைந்தது.

நியம வளையியை சுருக்கமான முறைகளில் கீறுவதற்கு மாணவர்களைப் பயிற்றுவித்தல் புள்ளி மட்டத்தை அதிகரித்துக் கொள்ளும் ஒரு முறையாகும்.

7 ஆம் வினா

7. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ இற்கு $x = 3\sin^2\frac{\theta}{2}$, $y = \sin^3\theta$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுக்ளினால் ஒரு வளையி C தரப்பட்டுள்ளது. $\frac{dy}{dx} = \sin 2\theta$ எனக் காட்டுக.

C மீது உள்ள ஒரு புள்ளி P இல் இருக்கும் தொடலியின் படித்திறன் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ எனின், P ஐ ஒத்த பரமானம் θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\frac{dy}{d\theta} = 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{1}{2} = 3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

5

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta \quad \textbf{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \quad \textbf{5}$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_P = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{5}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}. \quad \textbf{5}$$

25

---

7 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 91% இனர் மட்டுமேயாகும். பரும்படியான வளையிகளை வகையிடுதல் மற்றும் சங்கிலித் தேற்றத்தை பயன்படுத்துவதன் மூலம் வளையியின் படித்திறனை காணல் எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 52% ஆகும். சங்கிலி விதியைப் பிரயோகித்தல் சரியாக இருப்பினும் தரப்பட்ட பருமட்டான வளையியை வகையிடுவதில் தவறு காரணமாக புள்ளிகள் குறைவடைந்து இருந்தது. θ இன் வீச்சு 2θ இற்காக காணும் விடையில் காண முடியாது இருந்தது. வளையியின் வகையீட்டு முறைகளைப் பயிற்றுவிக்குமாறு பயிற்றுவித்தல் மூலம் இந்தப் பின்னடைவை இல்லாது செய்யலாம்.

8 ஆம் வினா

8. உற்பத்தியினூடாகவும் $2x+3y-k=0$, $x-y+1=0$ என்னும் நேர்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகவும் செல்லும் நேர்கோடு l எனக் கொள்வோம்; இங்கு $k\ (\neq 0)$ ஒரு மாறிலி. l இன் சமன்பாட்டை k இன் சார்பிற் காண்க.

$(1, 1)$, $(3, 4)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளும் l இன் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளனவெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $k < 18$ எனக் காட்டுக.

$l:\ 2x+3y-k+\lambda(x-y+1)=0$ இங்கு $\lambda\in\mathbb{R}$

உற்பத்தியினூடு l செல்வதால் $-k+\lambda=0$

$\therefore \lambda = k$ **5**

$\therefore l$ இன் சமன்பாடு $(2+k)x+(3-k)y=0$ **5**

(1.1) உம் $(3,4)$ உம் ஒரே பக்கத்தில் இருப்பதால்

$\Rightarrow [(2+k)+(3-k)][3(2+k)+4(3-k)]>0$ **5**

$\Rightarrow \quad 5(18-k)>0$

$\Rightarrow \quad k<18.$ **5**

25

மாற்றுமுறை

$l:\ x-y+1+\lambda(2x+3y-k)=0$ இங்கு $\lambda\in\mathbb{R}.$ **5**

உற்பத்தியினூடு l செல்வதால்

$1-\lambda k=0$

$\Rightarrow \quad \lambda k=1$

$\Rightarrow \quad \lambda=\frac{1}{k}.\ (\because k\neq 0)$ **5**

$\therefore l$ இன் சமன்பாடு $\left(1+\frac{2}{k}\right)x+\left(\frac{3}{k}-1\right)y=0$ **5**

$(1,1)$ உம் $(3,4)$ உம் ஒரே பக்கத்தில் இருப்பதால்

$\Rightarrow \left[1+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}-1\right]\left[3+\frac{6}{k}+\frac{12}{k}-4\right]>0$ **5**

$\Rightarrow \quad \frac{5(18-k)}{k^2}>0 \quad \Rightarrow \quad k<18.\ (\because k\neq 0)$ **5**

25

8 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 88% இனர் மட்டுமேயாகும். இந்த வினாவினது நேர்கோடுகள் தொடர்பான கோட்பாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளதுடன் அதன் இலகுதன்மை 38% ஆகும்.

எந்தவொரு நேர்கோட்டினதும் சமன்பாட்டை சரியாகப் பெற்றிருப்பதை காண முடிந்தது. எனினும் நேர்கோடொன்றினை அடிப்படையாகக் கொண்டு புள்ளிகள் இரண்டினது அசைவு தொடர்பாக சரியான எண்ணக்கருவை விளங்கிக் கொண்டு அதற்கேற்ப விடை எழுதுவதற்கு முயற்சிக்காமையினால் அந்தப் பகுதிக்கு உரிய புள்ளிகளைப் பெற முடியாது இருந்தது.

கோட்பாடுகளை சரியாக விளங்கிக் கொள்ளுமாறு பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு மாணவர்களைப் பயிற்றுவிப்பதன் மூலம் இந்தப் பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

9 ஆம் வினா

9. $A \equiv (1,2)$, $B \equiv (-5,4)$ எனவும் S என்பது AB ஐ ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் எனவும் கொள்வோம்.
(i) வட்டம் S இனதும்
(ii) வட்டம் S ஐ நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டுகின்ற, மையம் $(1,1)$ ஐ உடைய வட்டத்தினதும்
சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $\frac{(y-2)(y-4)}{(x-1)(x+5)} = -1$ for $x \neq 1, -5$ இற்கு (5)

$S : (x-1)(x+5)+(y-2)(y-4)=0$ (5)

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$

(ii) தேவையான வட்டம் S' எனின்,

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + c' = 0$. (5)

S, S' என்பன நிமிர் கோணத்தில் இடைவெட்டுவதால் $\Rightarrow 2gg' + 2ff' = c + c'$,

இங்கு, $g = 2,\ f = -3,\ g' = -1,\ f' = -1,\ c = 3,\ c' = c'$. (5)

$\Rightarrow 2(2)(-1) + 2(-3)(-1) = 3 + c'$

$\Rightarrow \quad c' = -1$ (5)

$\therefore S' : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

25

மாற்றுமுறை

(i) $S:(x-1)(x+5)+(y-2)(y-4)=0$ **10**

$x^2+y^2+4x-6y+3=0$

(ii) தேவையான வட்டம் S' எனின்,

$S':(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$ **5**

$x^2+y^2-2x-2y+2-r^2=0.$

S, S' என்பன நிமிர் கோணத்தில் இடைவெட்டுவதால்

$\Rightarrow 2gg'+2ff'=c+c',$

இங்கு $g=2, f=-3, g'=-1, f'=-1, c=3$ and $c'=2-r^2.$

$2(2)(-1)+2(-3)(-1)=3+(2-r^2)$ **5**

$\Rightarrow \quad r^2=3$ **5**

$\therefore S':x^2+y^2-2x-2y-1=0$ **25**

9 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 86% இனர் மட்டுமேயாகும். வட்டங்கள் தொடர்பான கோட்பாடுகளைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட வினாவாவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 32% ஆகும்.

இங்கு (i) ஆம் பகுதிக்குரிய AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டை சரியாக பெறாமையினாலும் அதனைச் சரியாக பெற்ற பரீட்சார்த்திகளாய் இருப்பினும் வட்டங்கள் இரண்டும் நிமிர்கோணங்களிலே இடைவெட்டுவதற்காக உள்ள கோட்பாட்டைச் சரியாகப் பயன்படுத்தாமையினாலும் புள்ளிகளை இழந்துள்ளனர். கோட்பாட்டினை விளங்கிக் கொள்ளுமாறு பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு மாணவர்களை ஈடுபடுத்துவதன் மூலம் இந்தப் பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

10 ஆம் வினா

10. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ இற்குச் சமன்பாடு $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ ஐத் தீர்க்க.

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

(5) (5)

$2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 2\sin 2x \cos x + \sin 2x$

$\cos 2x(2\cos x + 1) = \sin 2x(2\cos x + 1)$ (5)

$\cos 2x = \sin 2x \ (\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\cos x + 1 \neq 0)$

(5)

$\tan 2x = 1 \ (\because \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x \neq 0)$

$2x = \frac{\pi}{4} \ \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$x = \frac{\pi}{8}$ (5)

25

---

10 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இந்த வினா கட்டாயமாக இருப்பினும் விடை எழுத முயற்சித்தோர் 83% இனர் மட்டுமேயாகும். இது திரிகோணகணித சமன்பாடுகளை தீர்ப்பது தொடர்பான பிரச்சினையொன்றாவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 18% ஆகும். இந்தப் பிரசினத்தில் முதன் முறையாக சரியாகச் செய்திருப்பினும் அனேக பரீட்சார்த்திகள் $2\cos x + 1 \neq 0$ எனக் கருதி அந்தக் காரணியை நீக்கியிருந்தமையினால் சரியான முழுமையான தீர்வை பெறுவதற்கு முடியாது இருந்தது.

காரணிகள் உள்ளடக்கப்பட்ட திரிகோண கணித சமன்பாட்டை தீர்ப்பதற்கு மாணவர்களை ஈடுபடுத்துவதன் மூலம் இந்த பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

11 ஆம் வினா

11. (*a*) $a \neq 0$ ஆகவும் $a + b + c \neq 0$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக $a, b, c \in \mathbb{R}$ எனவும் $f(x) = ax^2 + bx + c$ எனவும் கொள்வோம்.

சமன்பாடு $f(x) = 0$ இல் 1 ஒரு **மூலமன்று** எனக் காட்டுக.

$f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம்.

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{a}(a + b + c)$ எனவும் $\frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\beta - 1}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $g(x) = 0$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் காட்டுக; இங்கு $g(x) = (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$.

இப்போது $a > 0$ எனவும் $a + b + c > 0$ எனவும் கொள்வோம்.

$f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் m_1 ஆனது $m_1 = -\frac{\Delta}{4a}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $\Delta = b^2 - 4ac$ ஆகும்.

$g(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் m_2 எனக் கொள்வோம். $(a + b + c)\, m_2 = a\, m_1$ என உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $g(x) \geq 0$ ஆக இருந்தால்-இருந்தால் மாத்திரம் எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $f(x) \geq 0$ எனக் காட்டுக.

(*b*) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ எனவும் $q(x) = x^2 + 3x + 6$ எனவும் கொள்வோம். மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $p(x)$ ஆனது $(x - 1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது உள்ள மீதியையும் $q(x)$ ஆனது $(x - 2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது உள்ள மீதியையும் காண்க.

$p(x) = (x - 1)\, q(x) + 5$ என வாய்ப்புப் பார்த்து, $p(x)$ ஆனது $(x - 1)(x - 2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது உள்ள மீதியைக் காண்க.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

(*a*) $f(1) = a + b + c \neq 0$. **5**

∴ 1 ஆனது $f(x) = 0$ இன் மூலமன்று **5**

10

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ and $\alpha\beta = \frac{c}{a}$. **5**

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$ **5**

$= \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1$

$= \frac{a + b + c}{a}$ **5**

வேறு முறை

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ **5**

$f(1) = a(1 - \alpha)(1 - \beta) = a + b + c$ **5**

$(1 - \alpha)(1 - \beta) = \frac{a + b + c}{a}$ **5**

15

$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - 1}$, $\beta_1 = \frac{1}{\beta - 1}$ எனக் கொள்வோம்.

α_1, β_1 ஐ மூலங்களாக கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $(x - \alpha_1)(x - \beta_1) = 0$. **10**

அதாவது $x^2 - (\alpha_1 + \beta_1)x + \alpha_1\beta_1 = 0$. ----------(1)

இப்போது $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\beta - 1} = \frac{\alpha + \beta - 2}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}$ **5**

$$= \frac{-\frac{b}{a} - 2}{(a+b+c)/a} = -\frac{(2a+b)}{a+b+c}.$$ **5**

மேலும் $\alpha_1\beta_1 = \frac{a}{a+b+c}$. **5**

(1) இன் படி தேவையான இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + \frac{(2a+b)}{(a+b+c)}x + \frac{a}{a+b+c} = 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = 0$, இங்கு $g(x) = (a+b+c)x^2 + (2a+b)x + a$. **5**

30

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ **5**

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= \underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0 \quad (\because a > 0)} - \frac{\Delta}{4a}$ **5**

$\geq -\frac{\Delta}{4a}$ சமம் ($x = -\frac{b}{2a}$ ஆகும் பொழுது)

5 **5**

$\therefore f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $-\frac{\Delta}{4a}$ **5**

அதாவது $m_1 = -\frac{\Delta}{4a}$. **25**

எனவே $m_2 = -\frac{\Delta'}{4(a+b+c)}$, **5**

இங்கு $\Delta' = (2a+b)^2 - 4(a+b+c)\cdot a$ **5**

$= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 - 4ab - 4ac$ **5**

$= b^2 - 4ac$

$= \Delta$.

மேலும் $m_2 = \dfrac{-\Delta'}{4(a+b+c)}$

$= \dfrac{4a\, m_1}{4(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)m_2 = am_1.$ **5**

20

$f(x) \geq 0$ எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும்

$\Leftrightarrow m_1 \geq 0$ **5**

$\Leftrightarrow m_2 \geq 0 \qquad \because m_2 = \dfrac{a\, m_1}{(a+b+c)}$ **5**

$\Leftrightarrow g(x) \geq 0$ எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் **5**

15

(b) $p(x)$ ஆனது $(x-1)$ ஆல் வகுக்கப்படும் பொழுது மீதி $p(1) = 5$ **5**

$q(x)$ ஆனது $(x-2)$ ஆல் வகுக்கப்படும் பொழுது மீதி $q(2) = 16$ **5**

10

$(x-1)q(x) + 5 = (x-1)(x^2 + 3x + 6) + 5$ **5**

$= x^3 + 3x^2 + 6x - x^2 - 3x - 6 + 5$

$= x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ **5**

$= p(x).$

10

$q(x) = (x-2)(x-5) + 16$ ஆகும் **5**

$\therefore\ p(x) = (x-1)\{(x-2)(x+5) + 16\} + 5$

$= (x-1)(x-2)(x+5) + 16x - 11.$ **5**

எனவே தேவையான மீதி $16x - 11.$ **5**

15

---

12 ஆம் வினா

12. (*a*) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $(1 + x)^n$ இற்கு ஈருறுப்பு விரியைக் கூறுக.

வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $r = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ இற்கு $\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{n-r}{r+1}$ எனக் காட்டுக.

$(1 + x)^n$ இன் ஈருறுப்பு விரியில் x^r, x^{r+1}, x^{r+2} ஆகியவற்றின் குணகங்கள் அதே வரிசையில் எடுக்கப்படும்போது $1 : 2 : 3$ விகிதங்களில் உள்ளனவாகும். இச்சந்தர்ப்பத்தில் $n = 14$ எனவும் $r = 4$ எனவும் காட்டுக.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{10r + 9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}$ எனவும் $f(r) = r(Ar + B)$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு A, B ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகள்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)} - \frac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றதென மேலும் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(*a*) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, இங்கு ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ for $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

5 5 — 10

$r = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$ இற்கு

$$\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}}$$ — 10

$$= \frac{\frac{1}{r+1}}{\frac{1}{n-r}} = \frac{n-r}{r+1} \quad \text{---------- (1)}$$ — 5 — 15

இதேபோல் $r = 0, 1, 2, \ldots, n-2,$ இற்கு

$$(1) \implies \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}} = \frac{n-r-1}{r+2}.$$ — 5

${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1 : 2 : 3$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. — 5

$$\Rightarrow \frac{n-r}{r+1} = 2 \quad , \quad \frac{n-r-1}{r+2} = \frac{3}{2}$$

5 5

$\Rightarrow n - r = 2(r+1)$ -------- (2) , $2(n-r-1) = 3(r+2)$

$\Rightarrow 4(r+1) - 2 = 3r + 6$

$\Rightarrow r = 4$, அத்துடன் (2) இன் படி $n = 14$.

(5) (5) **30**

(b) $\dfrac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)} = \dfrac{r(Ar+B)}{(2r-3)(2r-1)} - \dfrac{(r+1)(Ar+A+B)}{(2r-1)(2r+1)}$ **10**

$\Leftrightarrow 10r + 9 = r(Ar+B)(2r+1) - (r+1)(Ar+A+B)(2r-3)$ **5**

$= r\left[2Ar^2 + (A+2B)r + B\right] - (r+1)\left[2Ar^2 + (2A+2B-3A)r - 3(A+B)\right]$

$= 2Ar^3 + (A+2B)r^2 + Br - 2Ar^3 - (2B-A)r^2 + 3(A+B)r - 2Ar^2 - (2B-A)r + 3(A+B)$

$= -(4A+2B)r + 3(A+B)$, $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு **5**

$\Leftrightarrow r^1 : 4A + 2B = 10$, $r^0 : 3A + 3B = 9$ **10**

$\Leftrightarrow A = 2$, $B = 1$.

(5) (5) **40**

$U_r = g(r) - g(r+1)$, இங்கு $g(r) = \dfrac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)}$ அத்துடன் $f(r) = r(2r+1)$

$r = 1$; $U_1 = g(1) - g(2)$

$r = 2$; $U_2 = g(2) - g(3)$ **10**

$\vdots$

$r = n-1$; $U_{n-1} = g(n-1) - g(n)$

$r = n$; $U_n = g(n) - g(n+1)$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = g(1) - g(n+1)$ **10**

(5) (5)

$= \dfrac{(1)(3)}{(-1)(1)} - \dfrac{(n+1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}$

$= -3 - \dfrac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$ **30**

இந்த வினாவிற்கு 79% மான பரீட்சார்த்திகள் விடையளித்திருந்தனர். இந்த வினாவினது ஒன்றிற்கொன்று வேறுபட்ட இரு விடயங்களைக் கொண்டுள்ளது. பகுதி (a) யிலே ஈருறுப்பு விரிவு தொடர்பான அறிவும் பகுதி (b) யிலே விரிவு விருத்திகள் தொடர்பான அறிவும் சோதிக்கப்படுகிறது. பகுதி (a) யில் உபபகுதிகள் 3 உம் பகுதி (b) யிலே 3 உபபகுதிகளும் உள்ளன. பகுதி (a) யின் இலகுச்சுட்டி 30% இல் இருந்து 72% வரையிலாகும். அதில் 30% மான அளவு (a) யின் முதலாவது பகுதிக்காக இருப்பதுடன் அது மிகக்குறைந்த பெறுமானமாக இருப்பதற்கு காரணம் ஈருறுப்பு விதியினை காட்டும் போது கண்டிப்பாக காட்ட வேண்டிய ${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$, $r = 0, 1, 2, ...n$ என்று எழுதாமையினாலாகும். இறுதி விடையின் படிமுறைகளைச் சரியாகக் காட்டாமையினால் (a) யின் மூன்றாவது பகுதிக்குரிய முழுப்புள்ளிகளையும் பெறமுடியாது இருந்தது.

பகுதி (b) யின் இலகுதன்மை 44% இல் இருந்து 65% வரையிலாகும். (b) யின் முதலாம் பகுதியின் இலகுதன்மை 51% மான மட்டத்தில் காணப்படுவதற்கு காரணமானது பிரச்சினையின் A மற்றும் B என்ற மாறிகளைக் கணிப்பதில் ஏற்பட்ட வழு காரணமாகும் என்பது தெளிவாகிறது. (b) யின் மூன்றாவது பகுதியிலே பெற்றுக் கொள்ளப்பட்ட கூற்று $n \longrightarrow \propto$ ஆவதற்கு எல்லைகளை கண்டுபிடிக்கக் கூடிய முறைக்கு அமைத்துக் கொள்வதன் காரணமாக சரியான விடையை அண்மிப்பதற்கு முடியாது இருந்தது. பெறப்பட்ட விடையும் தர்க்க ரீதியான (அதாவது ஒடுங்கும் எனவும் முடிவுப் பெறுமானத்தை எழுதாமை) கூற்றைச் செய்ய முடியாமையினால் முழுப் புள்ளிகளையும் பெற முடியாது இருந்தது.

ஈருறுப்பு விரிவை எழுதும்போது தேவையான எல்லாப் பகுதிகளும் $({}^{n}C_{r}$ உடன் r இன் வீச்சைக்) கூறுவதற்கு மாணவர்களை பயிற்றுவிக்க வேண்டும். பிரசினத்திலே தரப்பட்ட தரவுகள் மூலம் தேவையான படிமுறை அட்சரங்களால் எழுதிக் காட்டித் தீர்ப்பதற்கு மாணவர்களைப் பயிற்றுவிக்க வேண்டும். விருத்திகள் ஒருங்குவது தொடர்பாக பிரசினம் தீர்க்கும் போது எல்லைகளை கணிப்பதற்காக தேவையானவாறு கூற்றைத் தயாரிப்பதற்கு பயிற்றுவிக்க வேண்டும்.

13ஆம் வினா

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ ஆகவும் $\mathbf{AY} = \mu\mathbf{Y}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக λ, μ ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளைக் காண்க.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{AP}$ ஆகியவற்றைக் கண்டு, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ எனக் காட்டுக;

இங்கு $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(*b*) ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளி A ஆனது சிக்கலெண் $2 + i$ ஐ வகைகுறிக்கின்றது. புள்ளி B ஆனது $OB = 2(OA)$ ஆகவும் $A\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ளது; இங்கு O ஆனது உற்பத்தி ஆகும். $A\hat{O}B$ ஆனது OA இலிருந்து இடஞ்சுழியாக அளக்கப்படுகின்றது. புள்ளி B இனால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

மேலும் $OACB$ ஓர் இணைகரமாக இருக்கத்தக்கதாகப் புள்ளி C இனால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணையும் காண்க.

(*c*) $z \in \mathbb{C}$ எனவும் $w = \frac{2}{1+i} + \frac{5z}{2+i}$ எனவும் கொள்வோம். $\text{Im } w = -1$ எனவும் $|w - 1 + i| = 5$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. $z = \pm(2 + i)$ எனக் காட்டுக.

(*a*) $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **5**

$\lambda\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ **5**

$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **5**

$\Leftrightarrow \lambda = 2.$

$\mathbf{AY} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mu\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix}$.

$\mathbf{AY} = \mu\mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **5**

$\Leftrightarrow \mu = -1.$ **5**

25

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-a - 2c = 1$ $\quad \Rightarrow c = -1, a = 1$

$-b - 2d = 0$ $\quad \Rightarrow d = -1, b = 2$

$a + c = 0$

$b + d = 1$

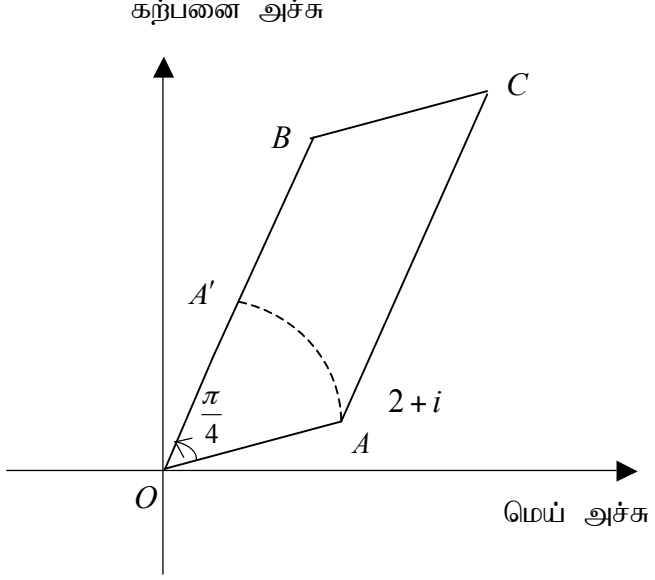
$\therefore \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **15**

$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **5**

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$. **5**

25

(*b*)



OA ஐ இடம்சுழிப்போக்கில் O பற்றி $\frac{\pi}{4}$ கோணத்தினூடாக சுழற்றும் போது புள்ளி A' இனால் குறிப்பிடப்படும் பெறப்படும் சிக்கலெண் $z_1 = (2+i)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **10**

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2+i)(1+i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+3i). \quad \textbf{5}$$

$OA = OA' \Rightarrow OB = 2OA'$.

B புள்ளி இனால் குறிப்பிடப்படும் சிக்கலெண் z_2

$$z_2 = 2z_1$$

$z_2 = \sqrt{2}(1+3i)$ ஆல் கொடுக்கப்படும். **10** **25**

புள்ளி C இனால் குறிப்பிடப்படும் சிக்கலெண்

$$= (2+i) + z_2 \quad \textbf{10}$$

$$= 2 + i + \sqrt{2}(1+3i)$$

$$= \left(2+\sqrt{2}\right) + \left(1+3\sqrt{2}\right)i. \quad \textbf{5} \quad \textbf{15}$$

(c) $w = \frac{2}{1+i} + \frac{5z}{2+i}$

$$= \frac{2(1-i)}{2} + \frac{5z(2-i)}{5} \quad \textbf{5}$$

$= 1 - i + z(2-i)$. 5

$\operatorname{Im} w = -1 \Rightarrow -1 = -1 + \operatorname{Im} z(2-i)$ **15**

$\Rightarrow \operatorname{Im} z(2-i) = 0$

$\Rightarrow z(2-i) = \bar{z}(2+i) - - - - - -(1)$

$|w-1+i|=5 \quad \Rightarrow |z(2-i)|=5$

$\Rightarrow |z||2-i|=5$

$\Rightarrow |z|\sqrt{5}=5$ **15**

$|z|=\sqrt{5}$ ----------(2)

$(1)\times z \Rightarrow z^2(2-i)=z\bar{z}(2+i)$

(2) $\Rightarrow$ $z\bar{z}=5$

$\therefore z^2(2-i)=5(2+i)$ **10**

$z^2=\frac{2+i}{2-i}.5=\frac{5}{5}(2+i)^2$

$\therefore z=\pm(2+i).$ **10**

60

---

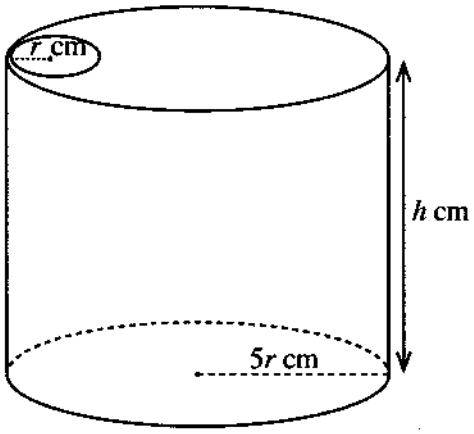
14. (*a*) $x \neq \pm 1$ இற்கு $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$ எனக் கொள்வோம்.

$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$y = f(x)$ இன் அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.
கிடை அணுகுகோடானது வளையி $y = f(x)$ ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
அணுகுகோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

(*b*) ஆரை $5r$ cm ஐயும் உயரம் h cm ஐயும் உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளை வடிவத்தில் உள்ள ஒரு மெல்லிய உலோகக் கொள்கலத்திற்கு, ஆரை r cm ஐ உடைய ஒரு வட்டத் துளை உள்ள ஆரை $5r$ cm ஐ உடைய ஒரு வட்ட மூடி உள்ளது (உருவைப் பார்க்க). கொள்கலத்தின் கனவளவு $245\,\pi$ cm^3 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. துளை உள்ள மூடியைக் கொண்ட கொள்கலத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு S cm^2 ஆனது $r > 0$ இற்கு $S = 49\pi\left(r^2 + \dfrac{2}{r}\right)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

S ஆனது இழிவாக இருக்கத்தக்கதாக r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(*a*) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$ for $x \neq \pm 1$.

$$f'(x) = \frac{(x^2-1).2.(x-3) - (x-3)^2.2x}{(x^2-1)^2} \qquad \textbf{15}$$

$$= \frac{2(x-3)[x^2-1-x(x-3)]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}. \qquad \textbf{5}$$

20

கிடை அணுகுகோடு : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. இதிலிருந்து $y = 1$

மேலும் **5**

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ ஆ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \infty$ ஆ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$.

நிலைக்குத்து அணுகுகோடு : $x = \pm 1$ **5**

10

தீர்க்க : $y = f(x)$ இல் $y = 1$ ஆகும் போது

i.e $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-1} = 1$ **5**

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 1$

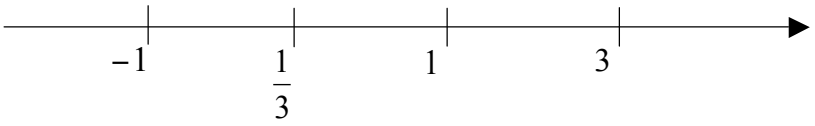
$\Leftrightarrow 6x = 10$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}.$ **5**

எனவே தேவையான புள்ளி $= \left(\dfrac{5}{3}, 1\right).$ **5**

15

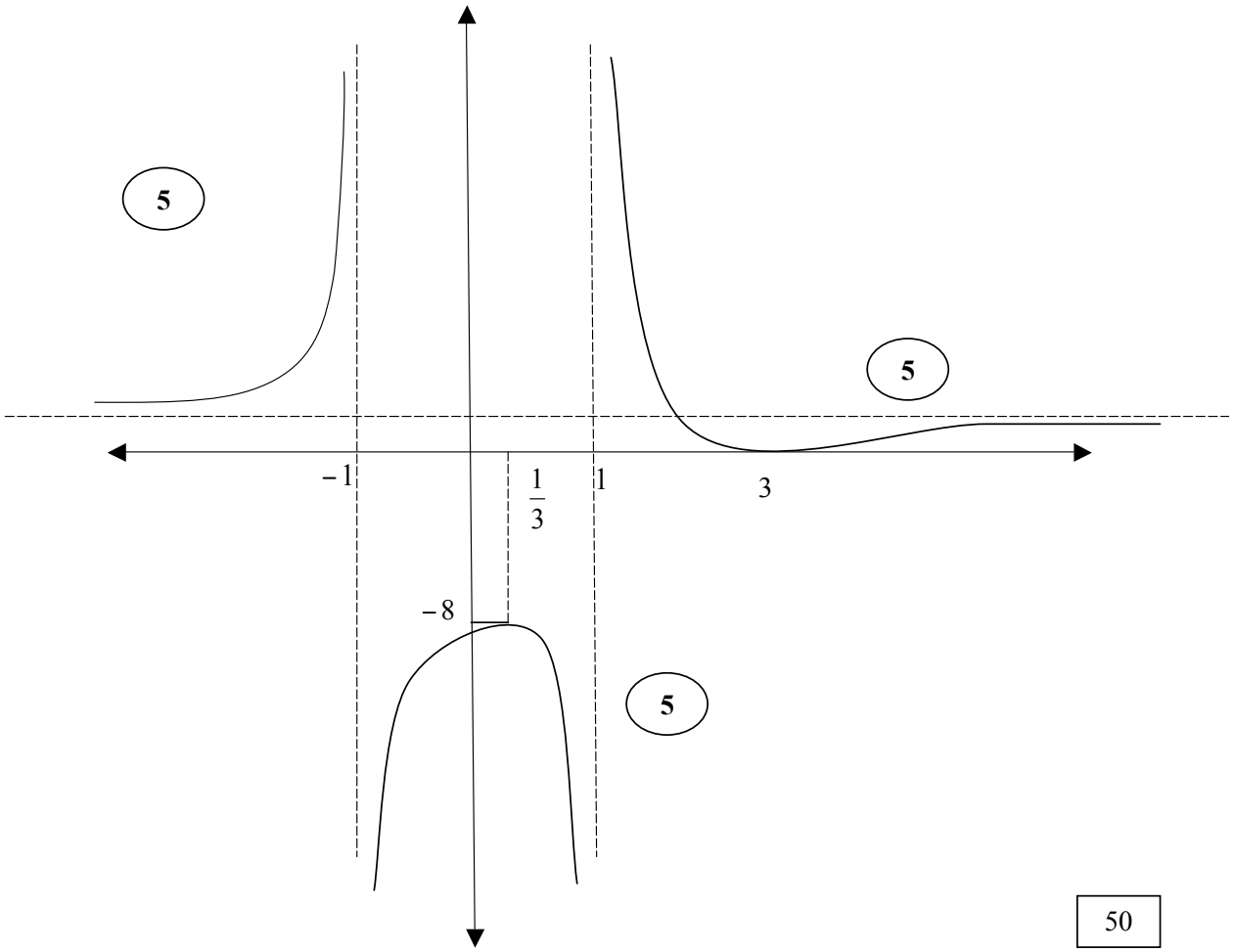
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ அல்லது $x = \dfrac{1}{3}.$



	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ குறி	(+)	(+)	(-)	(-)	(+)
	5	**5**	**5**	**5**	**5**

இரண்டு திரும்பல் புள்ளிகளாவன: $\left(\dfrac{1}{3}, -8\right)$ – உயர்வு புள்ளி **5** $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}{\frac{1}{9}-1} = \dfrac{64}{-8} = -8$

$(3, 0)$ – இழிவுப் புள்ளி **5**



50

(*b*) $S = 2\pi(5r)h + \pi(5r)^2 \times 2 - \pi r^2$ **10**

$= 10\pi rh + 49\pi r^2$ ----------(1)

$245\pi = \pi(5r)^2 \times h$ **5**

$\therefore h = \frac{245}{25r^2} = \frac{49}{5r^2}$

(1) $\Rightarrow S = 10\pi r \times \frac{49}{5r^2} + 49\pi r^2$ **5**

$= 49\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right);\ r > 0.$

20

$\frac{dS}{dr} = 49\pi\left(2r - \frac{2}{r^2}\right)$ **10**

5 $\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2r = \frac{2}{r^2} \Leftrightarrow r = 1.$ ($r > 0$ ஆதலால்) **5**

5 $0 < r < 1$ இற்கு $\frac{dS}{dr} < 0$, $r > 1$ இற்கு $\frac{dS}{dr} > 0$ **5**

$\therefore$ r இழிவளவாகும். இங்கு $r = 1$ **5**

35

---

15 ஆம் வினா

15.(*a*) (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ ஐக் காண்க.

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ ஐக் கண்டு, **இதிலிருந்து,** $\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ ஐக் காண்க.

மேற்குறித்த தொகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி, $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ ஐக் காண்க.

(*b*) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைத்து, **இதிலிருந்து,** $\int \frac{(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}dx$ ஐக் காண்க.

(*c*) (i) $n \neq -1$ எனக் கொள்வோம். பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int x^n(\ln x)\,dx$ ஐக் காண்க.

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(a) (i)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \quad (10)$$

$= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C_1$, இங்கு C_1 எதேச்சையான மாறிலியாகும். (10)

20

(ii) $\frac{d\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)}{dx} = \frac{1}{2}(3+2x-x^2)^{-1/2} \times (2-2x)$

$= \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ (10)

இதிலிருந்து,

$\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -\sqrt{3+2x-x^2} + C_2$,இங்கு C_2 எதேச்சையான மாறிலியாகும். (10)

$\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ (10)

$= -\sqrt{3+2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C_3$, இங்கு C_3 எதேச்சையான மாறிலியாகும்.

(5) (5)

40

(b) $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ **10**

$$2x - 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

x^2: $0 = A + B$

x^1: $2 = B + C$

x^0: $-1 = A + C$

$A - C = -2$ $\quad A = -3/2$, $\quad C = 1/2$, $\quad B = 3/2$ **10**

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \left(\frac{-3}{2}\right)\frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{3x+1}{x^2+1}$$ **5**

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx = \frac{-3}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{3x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$ **5**

$$= \frac{-3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C_4,$$ **15**

இங்கு C_4 எதேச்சையான மாறிலியாகும்.

40

(c) (i) $n \neq -1$,

$$\int x^n(\ln x)dx = \int (\ln x).\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx$$ **10**

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)}.\frac{1}{x}dx$$ **10**

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)}\int x^n dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C_5$$ **10**

இங்கு C_5 எதேச்சையான மாறிலியாகும்.

30

(ii) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$. **5**

15

20

---

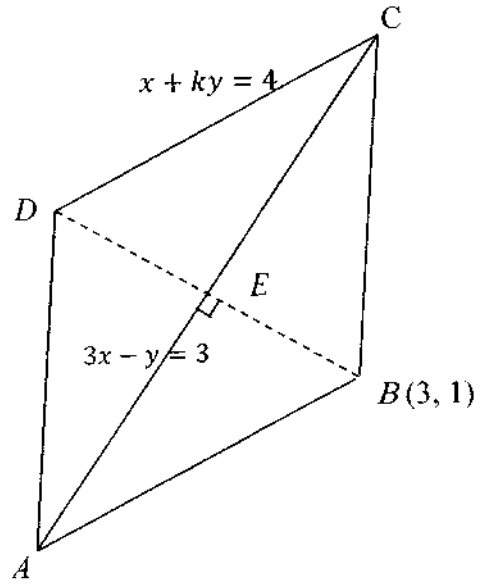
16 ஆம் வினா

16. (*a*) ஒரு சாய்சதுரம் $ABCD$ இன் மூலைவிட்டம் AC இன் சமன்பாடு $3x - y = 3$ உம் $B \equiv (3, 1)$ உம் ஆகும். அத்துடன் CD இன் சமன்பாடு $x + ky = 4$ ஆகும்; இங்கு k ஒரு மெய்ம் மாறிலி. k இன் பெறுமானத்தையும் BC இன் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(*b*) முறையே $x^2 + y^2 = 4, (x-1)^2 + y^2 = 1$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் தரப்படும் C_1, C_2 என்னும் வட்டங்களை அவற்றின் தொடுகைப் புள்ளியைத் தெளிவாகக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

ஒரு வட்டம் C_3 ஆனது C_1 ஐ உள்ளேயும் C_2 ஐ வெளியேயும் தொடுகின்றது. C_3 இன் மையம் வளையி $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ மீது கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக.

(*a*)



BD இன் சமன்பாடு $y - 1 = -\frac{1}{3}(x-3) \quad (\because BD \perp AC)$ **10**

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = t$ எனக் கொள்வோம். **10**

$\therefore x = 3 + 3t, \; y = 1 - t.$

D எனும் புள்ளிக்குத் தொடர்பான பெறுமானம் t என்க.

எனின் $E \equiv \left(3 + \frac{3t}{2}, 1 - \frac{t}{2}\right)$ ஆனது AC யில் கிடக்கும்

$\therefore 3\left(3 + \frac{3t}{2}\right) - \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 3$ **10**

$\Rightarrow 8 + 5t = 3 \qquad \Rightarrow t = -1.$

$\therefore D \equiv (0, 2)$ **10**

எனின் DC யில் கிடக்கும்

$0 + k \times 2 = 4$ **10**

$k = 2.$

50

$$\left.\begin{matrix} x+2y=4 \\ 3x-y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7x=10\,;7y=9$$

$C \equiv \left(\frac{10}{7},\frac{9}{7}\right)$. **10**

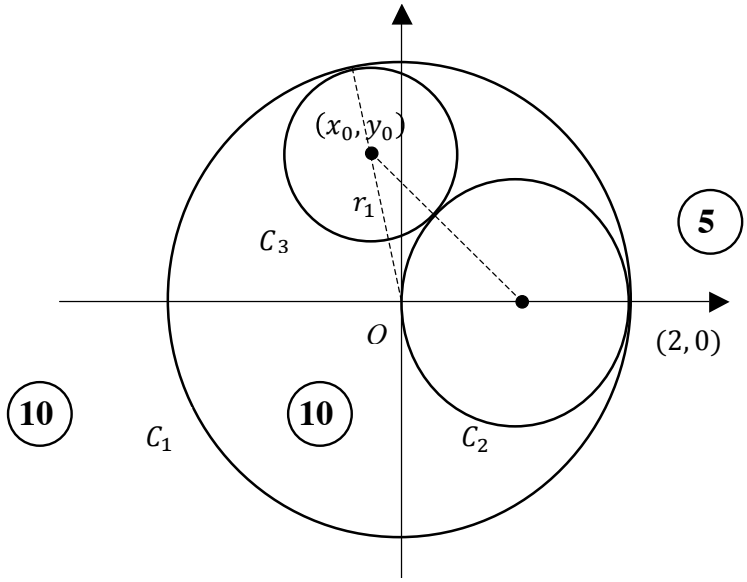
BC இன் சமன்பாடு

$$y-1=\frac{\frac{2}{7}}{-\frac{11}{7}}(x-3)$$

$-11y+11=2x-6$ **10**

$2x+11y=17$. **20**

(*b*)



5 **10** **10** **25**

C_3 ஆனது C_1 ஐ உட்புறமாகத் தொடும் எனின் ⇒ $2-r_1=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}$ **15**

C_3 ஆனது C_2 ஐ வெளிப்புறமாகத் தொடும் எனின் $\Rightarrow 1+r_1=\sqrt{(x_0-1)^2+{y_0}^2}$

$$3=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+\sqrt{(x_0-1)^2+{y_0}^2}$$ **15**

$$(x_0-1)^2+{y_0}^2=9-6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+{x_0}^2+{y_0}^2$$ **5**

$${x_0}^2-2x_0+1+{y_0}^2=9-6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}+{x_0}^2+{y_0}^2$$ **10**

$$2x_0+8=6\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}$$ **5**

$$\Rightarrow ({x_0}^2+{y_0}^2)={x_0}^2+8x_0+16$$

$$\Rightarrow 8{x_0}^2+9{y_0}^2-8x_0-16=0$$

இதிலிருந்து (x_0,y_0), $8x^2+9y^2-8x-16=0$ வளையி மீது கிடக்கிறது. **5** **55**

---

17 ஆம் வினா

17. (*a*) $\tan(\alpha+\beta)$ இற்கான திரிகோணகணிதச் சர்வசமன்பாட்டை $\tan\alpha, \tan\beta$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக.

இதிலிருந்து, $\tan 2\theta$ ஐ $\tan\theta$ இன் சார்பிற் பெற்று, $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ எனக் காட்டுக.

இறுதிச் சமன்பாட்டில் $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$ எனப் பிரதியிட்டு, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$ ஆனது $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ இன் ஒரு தீர்வு என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1)$ என மேலும் தரப்படும்போது $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ என உய்த்தறிக.

(*b*) $0 < A < \pi$ இற்கு $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$ எனக் காட்டுக.

வழக்கமான குறிப்பீட்டில், ஒரு முக்கோணி ABC இற்குக் கோசைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி $(a+b+c)(b+c-a)\tan^2\dfrac{A}{2} = (a+b-c)(a+c-b)$ எனக் காட்டுக.

(*c*) $\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{65}\right)$ எனக் காட்டுக.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$ **10**

10

Let $\alpha = \beta = \theta$: **5**

$$\tan 2\theta = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.$$ **5**

10

$\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta)$ **5**

$= \dfrac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}$ **5**

$= \dfrac{\tan\theta(1-\tan^2\theta) + 2\tan\theta}{1-\tan^2\theta - 2\tan^2\theta}$ **5**

$= \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ **5**

20

$$\theta = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{1 - 3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$ **5**

$\Rightarrow -3\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \tan^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) - 3\tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 1 = 0. \quad \left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1.\right)$ **5**

$\Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ஆனது $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ இன் தீர்வாகும். **5**

15

$(x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) \neq -1 \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ என்பது $x^2 - 4x + 1 = 0$ இன் தீர்வாகும். **5**

5

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$ **5**

$\frac{5\pi}{12} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 1.$ **5**

$2 - \sqrt{3} < 1$, ஆதலால் $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}.$ **5**

25

(*b*) $0 < A < \pi.$ **5**

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{A}{2}\right)$$ **5**

5

15

கோசைன் விதிப்படி

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$ **5**

$$\cos A = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

இப்போது $\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}}{1 - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}}$ **10**

$$= \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc - a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{(b + c - a)(a + b + c)} \quad \textbf{5}$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(b + c - a)\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) = (a + b - c)(a + c - b). \quad \textbf{5}$$

30

(*c*) Let $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$, $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ எனக் கொள்வோம்.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha > 0$

$\cos\beta > 0.$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ **5**

$= \frac{3}{5}.\sqrt{1 - \frac{25}{169}} + \sqrt{1 - \frac{9}{25}}.\frac{5}{13}$ **5**

$= \frac{3}{5}.\frac{12}{13} + \frac{4}{5}.\frac{5}{13}$

$= \frac{56}{65}.$ **5**

$\frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, எனவே, $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

இதேபோல் $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$, எனவே, $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

$\therefore 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ ஆதலால் $\alpha + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$ ஆகும். **10**

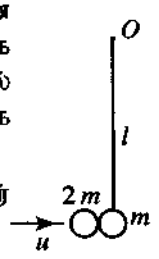
25

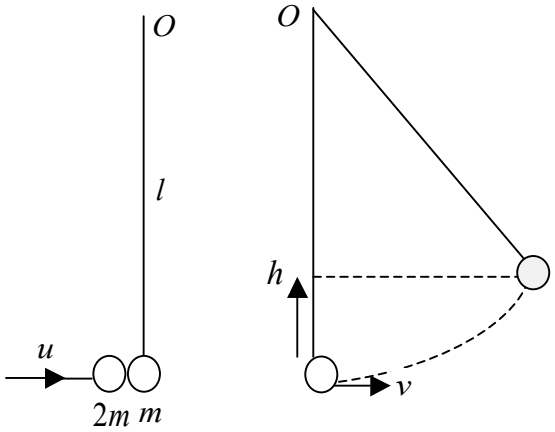
2.2.3 **II ஆவது வினாத்தாளில் ஒவ்வொரு வினாக்களும் அவற்றிற்கு எதிர்பார்க்கப்பட்ட விடைகள், புள்ளி வழங்கும் திட்டம், விடையளித்தல் தொடர்பான அவதானிப்பும் ஆலோசனைகளும்**

(10) இணைந்த கணிதம் வினாப்பத்திரம் II - பகுதி A

வினா இலக்கம் 1

1. ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இற் கட்டப்பட்டுள்ள நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் மற்றைய நுனியில் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை நாப்பத்தில் தொங்குகின்றது. திணிவு $2m$ ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை முதல் துணிக்கையுடன் வேகம் u உடன் கிடையாக மோதி இணைகின்றது. சேர்த்தித் துணிக்கை இயங்கத் தொடங்கும் வேகத்தைக் காண்க.
$u = \sqrt{gl}$ எனின், சேர்த்தித் துணிக்கை அதன் தொடக்க மட்டத்திற்கு மேலே ஓர் உயர்ந்தபட்ச உயரம் $\frac{2l}{9}$ ஐ அடைகின்றதெனக் காட்டுக.





கூட்டுத்துணிக்கை இயங்க ஆரம்பிக்கும் வேகம் v என்க

தொகுதிக்கு $\underline{I} = \Delta(M\underline{v})$ ஐப் பிரயோகிக்க.

$\rightarrow \quad 0 = 3mv - 2m \times u$ **5**

$\Rightarrow v = \frac{2u}{3}.$ **5**

சக்திக்காப்புத் தத்துவத்தின் மூலம், $(3mg)h = \frac{1}{2}(3m)v^2$ இங்கு h தேவையான உயரமாகும்.

$\therefore\ h = \frac{v^2}{2g} = \frac{4u^2}{9(2g)} = \frac{4gl}{18g} = \frac{2l}{9}.$ **5** **10**

25

---

1 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

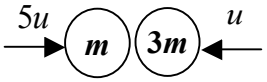
இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருப்பினும் விடையளிக்க முயற்சித்தவர்கள் 95% இனர் மட்டுமே. இரு துணிக்கைகளின் இயக்கம் தொடர்பாக உந்த மாற்று வீதம் மற்றும் சக்தியின் காப்பு தத்துவத்தை சரியாக இடுவது இதன் மூலம் எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 56% ஆகும். இந்த உந்த மாற்றுவீத கோட்பாட்டை இடுவதன் மூலம் தீர்க்க முடியும். சக்தி காப்பு தத்துவத்தை இடும்போது விரிவு 3m இற்காக m இனை இட்டமையினால் முழுமையான புள்ளியைப் பெற முடியாது இருந்தது. மேலும் ஆர்முடுகல் அசைவிற்காக இயக்க சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு முயற்சித்து இருந்தனர்.

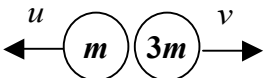
உந்தகாப்பு விதி மற்றும் சக்தியின் காப்பு தத்துவங்களைப் பயன்படுத்தி எளிய பிரசினங்களை தீர்ப்பதற்கு மாணவர்களை பயிற்றுவிப்பதனால் இத்தகைய பின்னடைவை இல்லாது செய்யலாம்.

வினா இலக்கம் 2

2. உருவிற் காணப்படுகின்றவாறு திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உம் திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q உம் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரே நேர்கோட்டின் வழியே முறையே $5u, u$ என்னும் கதிகளுடன் ஒன்றையொன்று நோக்கி இயங்குகின்றன. மொத்தலிற்குப் பின்னர் P உம் Q உம் **ஒன்றிலிருந்தொன்று அப்பால்** முறையே u, v ஆகிய கதிகளுடன் இயங்குகின்றன. v ஐ u இன் சார்பிற் கண்டு, P இற்கும் Q இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.







தொகுதிக்கு $\underline{I} = \Delta(M\underline{v})$ ஐப் பிரயோகித்தல்.

$\rightarrow \quad 0 = (3mv - mu) - (5mu - 3mu)$ **5**

$\Rightarrow 3mv = 3mu$

$\Rightarrow v = u$. ----------(1) **5**

நியூட்டனின் மீள்தன்மை விதிப்படி:

$v + u = e(5u + u)$ **10**

$(1) \Rightarrow 2u = 6eu$

$\therefore \quad e = \frac{1}{3}$. **5**

25

---

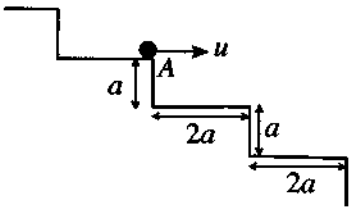
2 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

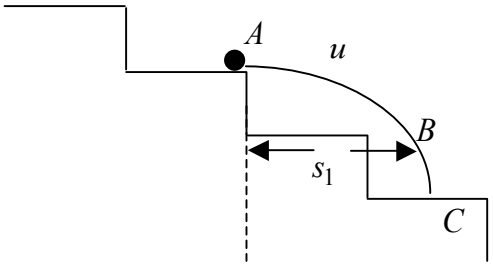
இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருப்பினும் 96%இனர் விடையளித்துள்ளனர். மீள்தன்மை பொருட்கள் இரண்டிற்கிடையேயான பிரசினத்தை விபரிப்பதற்குத் தேவையான சமன்பாட்டை சரியாக இடுதல் இதன் மூலம் எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 65% ஆகும்.

மீள்தன்மை பிரசினத்திற்காக உந்த மாற்று வீதம் அல்லது உந்தகாப்பு விதி அல்லது நியூட்டனின் விதியை சரியாக இடுவதனால் சரியான திசை தொடர்பான தெளிவு குறைவானதால் பிரசினத்திற்கு திருப்திகரமாக விடை எழுத முடியாதிருந்தது. இதற்காக மாணவர்களுக்கு பயிற்சிகளைத் தொடர்ச்சியாக செய்வதன் மூலம் இந்தப் பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

வினா இலக்கம் 3

3. ஒரு துணிக்கை P ஆனது ஒரு நிலைத்த படிக்கட்டின் ஒரு படியின் ஓரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி A இலிருந்து அவ்வோரத்திற்குச் செங்குத்தாக $u = \frac{3}{2}\sqrt{ga}$ இனால் தரப்படும் ஒரு வேகம் u உடன் கிடையாக எறியப்பட்டு, புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்குகின்றது. ஒவ்வொரு படியினதும் உயரம் a உம் நீளம் $2a$ உம் ஆகும் (உருவைப் பார்க்க). துணிக்கை P ஆனது A இற்குக் கீழே முதற் படியிற் **படுவதில்லை** எனவும் A இற்குக் கீழே இரண்டாம் படியில் A இலிருந்து ஒரு கிடைத் தூரம் $3a$ இற் படும் எனவும் காட்டுக.





P இன் இயக்கத்திற்கு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்க.

$\downarrow A$ இலிருந்து B இற்கு $a = \frac{1}{2}gt_1^2$, இங்கு t_1 ஆனது A இற்குக் கீழே முதலாம் படியின் மட்டத்தை அடைய எடுத்த நேரமாகும். (5)

$$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

t_1 நேரத்தில் கிடையாக இயங்கிய தூரம் s_1 என்க.

$\rightarrow A$ இலிருந்து B இற்கு : $s_1 = u \times t_1 = \frac{3}{2}\sqrt{g}a \times \sqrt{\frac{2a}{g}} = \frac{3}{\sqrt{2}}a > 2a.$ **5**

5

எனவே A இற்கு கீழே முதலாம் படியை P மோதாது.

A இலிருந்து C இற்குச் செல்ல எடுத்த நேரம் $t_2 = \sqrt{\frac{2(2a)}{g}}$ ஆகும்.

A இற்கு கீழே முதலாம் படியை P மோதாது.

$\rightarrow s = ut_2 = \frac{3}{2}\sqrt{ga} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{g}} = 3a.$

5

25

---

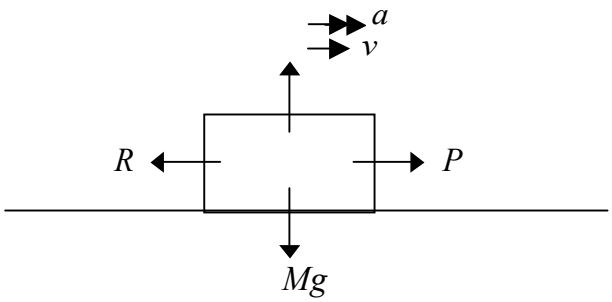
3 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருந்தபோதிலும் பரீட்சார்த்திகளில் 85% இனர் மட்டுமே விடையளித்துள்ளனர். புவியீர்ப்பு மையத்தின் கீழ் துணிக்கையின் இயக்கம் தொடர்பான கோட்பாடுகளை இங்கு எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 32% ஆகும். பிரசினத்தை தெளிவாக விளங்கிக் கொள்ளாமையினால் முழுப்புள்ளியையும் பெற முடியாது இருந்தது. எளிய பிரசினங்களில் ஈடுபடுத்துவதன் மூலம் அந்தப் பின்னடைவை இல்லாது செய்யலாம்.

வினா இலக்கம் 4

4. மாறாப் பருமன் R N உள்ள ஒரு தடைக்கு எதிரே ஒரு நேர்ச் சமதள வீதி வழியே திணிவு M kg ஐ உடைய ஒரு கார் இயங்குகின்றது. கார் கதி v m s^{-1} உடன் செல்லும் ஒரு கணத்தில் அதன் ஆர்முடுகல் a m s^{-2} ஆகும். இக்கணத்தில் அதன் எஞ்சினின் வலு $(R + Ma)v$ W எனக் காட்டுக.

பின்னர் கார் அதே மாறாப் பருமன் R N ஐக் கொண்ட ஒரு தடைக்கு எதிரே அதே வலுவில் தொழிற்பட்டுக் கிடையுடன் ஒரு கோணம் α இற் சாய்ந்த ஒரு நேர் வீதியில் மேல்நோக்கி ஒரு மாறாக் கதி v_1 m s^{-1} உடன் இயங்குகின்றது. $v_1 = \dfrac{(R + Ma)v}{R + Mg\sin\alpha}$ எனக் காட்டுக.



உந்து விசை P N என்க.

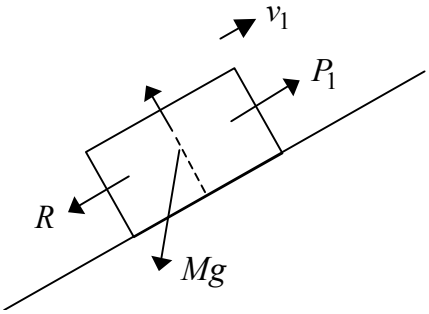
$\underline{F} = m\underline{a}$ →யாக பிரயோகிக்க

$P - R = Ma$ ---------- (1) **5**

எஞ்சினின் வலு H W என்க.

எனவே, $H = P \times v$ **5**

$= (R + Ma)v$ ((1) இன்படி) **5**



$\underline{F} = m\underline{a}$: 

$P_1 - R - Mg\sin\alpha = 0$ ---------- (2) **5**

மேலும் $H = P_1 \times v_1$

$\therefore\ v_1 = \dfrac{H}{P_1} = \dfrac{(R + Ma)v}{(R + Mg\sin\alpha)}$. ((2) இன்படி)

5

25

4 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருந்தபோதிலும் பரீட்சார்த்திகளில் 93% இனர் மட்டுமே விடையளித்துள்ளனர். P = FV என்ற நியம சமன்பாட்டை இடுவது தொடர்பாக சோதித்து இங்கு எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 75% ஆகும்.

அலகுகளுக்கிடையிலான தொடர்பை சரியாகப் பயன்படுத்தாமையினால் தரப்பட்ட விடையை அண்மிப்பதற்கு முடியாது இருந்தது. இவ்வகையான எளிய பிரச்சினைகளை தீர்க்கும்போது அலகுப் பரிமாற்றம் மற்றும் சக்தியை குறிப்பது தொடர்பாக விசேட கவனத்தைச் செலுத்தி பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கு ஈடுபடுத்த வேண்டும்.

வினா இலக்கம் 5

5. வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{i} + (1 - \alpha)\,\mathbf{j}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ ஆகியவற்றையும்

(ii) α இன் சார்பில் $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ ஆகியவற்றையும்

காண்க.

a இற்கும் **c** இற்குமிடையே உள்ள கோணம் **b** இற்கும் **c** இற்குமிடையே உள்ள கோணத்திற்குச் சமமெனின், $\alpha = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

(i) காவிகளின் பருமன்கள்

$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|\underline{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

} **5** இரண்டிற்கும்

(ii) $\underline{a}\cdot\underline{c} = 3\alpha + 4(1-\alpha) = 4 - \alpha$ **5**

$\underline{b}\cdot\underline{c} = 4\alpha + 3(1-\alpha) = 3 + \alpha$ **5**

$\underline{a}, \underline{c}$ க்கிடையிலான கோணம் θ என்க.

5

$\underline{a}\cdot\underline{c} = |\underline{a}||\underline{c}|\cos\theta$

$\underline{b}\cdot\underline{c} = |b||\underline{c}|\cos\theta.$

$|\underline{a}| = |b|$, என்பதனால் $\underline{a}\cdot\underline{c} = b\cdot\underline{c}$.

$\therefore 4 - \alpha = 3 + \alpha$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$ **5**

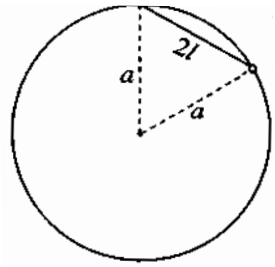
25

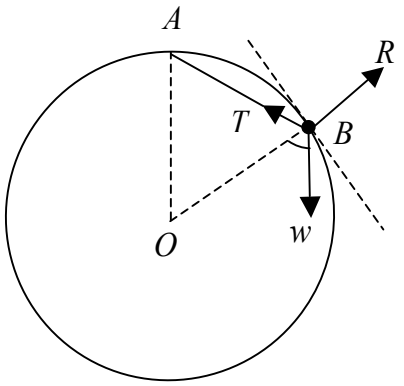
5 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருந்தபோதிலும் பரீட்சார்த்திகளில் 91% இனர் மட்டுமே விடையளித்துள்ளனர். காவிகள் இரண்டிற்கிடையான குற்றுப் பெருக்கம் தொடர்பான அறிவைப் பரிசோதித்தில் இதன் மூலம் எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 52% ஆகும். **i** மற்றும் **j** அலகுக் காவிகளைக் கொண்டு காவிகள் இரண்டின் குற்றுப் பெருக்கத்தை எழுதுவதில் சரியாக ஈடுபடாமையினால் அதிக பரீட்சார்த்திகள் இறுதி விடையை அண்மித்து இருக்கவில்லை. குற்றுப்பொருக்கம் தொடர்பாக பல்வேறு பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு ஈடுபடுத்துவதனால் இந்த பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

வினா இலக்கம் 6

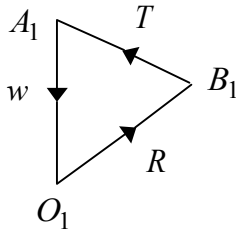
6. நீளம் $2l$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஆரை $a\left(>\sqrt{2}l\right)$ ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய ஒப்பமான விறைத்த வட்டக் கம்பியின் மிகவும் உயர்ந்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கம்பி வழியே சுயாதீனமாக இயங்கத்தக்க நிறை w ஐ உடைய ஒரு சிறிய ஒப்பமான பவளம் இழையின் மற்றைய நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு, இழை இறுக்கமாக இருக்க, பவளம் நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. பவளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைக் குறித்து, இழையின் இழுவை $\frac{2wl}{a}$ எனக் காட்டுக.





5

விசை முக்கோணி

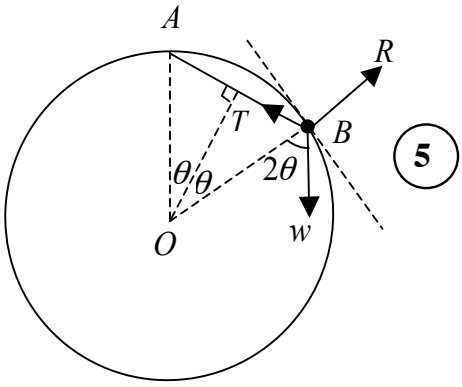


10

$$\frac{T}{AB}=\frac{w}{OA}\Rightarrow T=\frac{2wl}{a}$$ **5**

5 **25**

மாற்று முறை 1



5

இலாமியின் தேற்றப்படி $\frac{T}{\sin(\pi-2\theta)}=\frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$ **10**

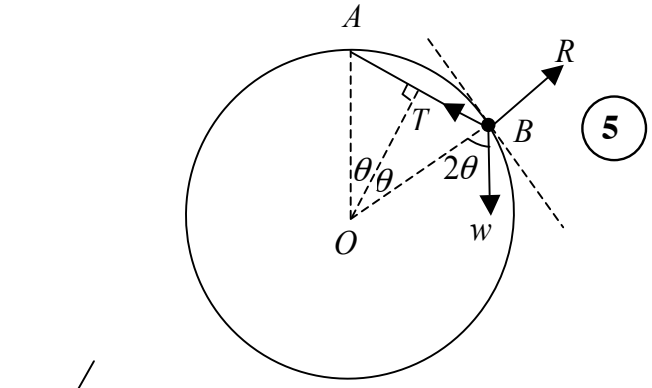
$$\therefore\quad T=w\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$$

$$=2w\sin\theta=\frac{2wl}{a}\left(\because \sin\theta=\frac{l}{a}\right).$$ **5**

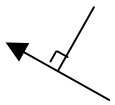
5

25

மாற்று முறை 2



5



OB செங்குத்தான திசையில் பிரிக்க

$$T\cos\theta = w\sin 2\theta$$

10

$$T = w\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$$

5

$$= 2w\sin\theta$$

$$= \frac{2wl}{a}\left(\because \sin\theta = \frac{l}{a}\right).$$

5

25

6 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருந்தபோதிலும் பரீட்சார்த்திகளில் 79% இனர் மட்டுமே விடையளித்துள்ளனர். துணிக்கையின் மீது செயற்படும் ஒரு தள விசைகள் மூன்று சமநிலையின் கீழ் இருக்கும் அறிவைப் பரிசீலிப்பதற்காக இந்த வினாவின் மூலம் எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 23% ஆகும். விசைகளைக் குறிப்பது தொடர்பான பின்னடைவு காணப்படல் மற்றும் விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்துவதற்கு முயற்சித்த பரீட்சார்த்திகள் விசை முக்கோணியில் ஒரு தடவையில் அறிந்துகொள்ளாத காரணத்தினால் முழுப்புள்ளியையும் பெற முடியாதிருந்தது. அநேக பரீட்சார்த்திகள் எளிய முறைகளைக் கடைபிடிக்காமையினால் சக்தி பிரிப்பு முறையைப் பயன்படுத்துவதனால் பிரசினம் சிக்கலான நிலைக்கு மாறியுள்ளது. சரியாக சக்தி வரைபடத்தை கீறுதல் மற்றும் அவற்றிற்கு சமனான எளிய முறை (விசை முக்கோணி, இலாமியின் விதி) மூலம் பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்குப் பயிற்றுவிப்பதன் மூலம் இந்தப் பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

வினா இலக்கம் 7

7. **A, B என்பன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் இரு நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $P(A)=p$, $P(B)=\frac{p}{2}$, $P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{2p}{3}$; இங்கு $p>0$ ஆகும். $P(A\cap B)$ ஐ p இன் சார்பில் காண்க.**

A, B ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனின், $p=\frac{5}{6}$ என உய்த்தறிக.

A, B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. (5)

இதன்படி $\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{3p}{2}-P(A\cap B)$. ---------- (1) (5)

இதன்படி $P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{2p}{3}$. ---------- (2)

$(1)\ ,\quad (2)\Rightarrow \frac{3p}{2}-2P(A\cap B)=\frac{2p}{3}$

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{5p}{12}$. (5)

A உம் B உம் சாரா நிகழ்ச்சிகளாதலால் $P(A\cap B)=P(A)\ P(B)$. (5)

$\Rightarrow \frac{5p}{12}=p\cdot\frac{p}{2}$

$\Rightarrow p=\frac{5}{6}$. $(\because p>0)$ (5) **25**

$\Rightarrow \frac{5p}{12}=p\cdot\frac{p}{2}$

$\Rightarrow p=\frac{5}{6}$. $(\because p>0)$ (5)

25

---

7 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருந்தபோதிலும் பரீட்சார்த்திகளில் 90% இனர் மட்டுமே விடையளித்துள்ளனர். எளிய நிகழ்தகவுகளைப் பயன்படுத்தி அடிப்படை உள்ளடக்கங்கள் எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 61% ஆகும். இரு சம்பவங்களின் சாராமை தொடர்பான தெரிவு இன்மையினால் இந்த பிரசினத்திற்கான முழுப் புள்ளிகளையும் பெற முடியாது இருந்தது.

நிகழ்தகவு தொடர்பான அடிப்படைத் தேற்றத்தை சரியாகப் பயன்படுத்தி எளிய பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு பயிற்றுவிப்பதன் மூலம் இந்த பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

வினா இலக்கம் 8

8. ஒரு பையில் நிறம் தவிரச் சர்வசமனான 6 வெள்ளைப் பந்துகளும் n கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒன்றுக்குப் பின்னர் மற்றையது என்றவாறு, பிரதிவைப்பு இல்லாமல், இரு பந்துகள் எழுமாற்றாகப் பையிலிருந்து வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன. முதற் பந்து வெள்ளையாகவும் இரண்டாம் பந்து கறுப்பாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{15}$ ஆகும். n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

முதலாம் பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{n+6}$.

முதலாம் பந்து வெள்ளையாகவும் இரண்டாம் பந்து கறுப்பாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)}$ **10**

$\therefore \frac{6}{(n+6)} \cdot \frac{n}{(n+5)} = \frac{4}{15}$ **5**

$\Rightarrow 2n^2 - 23n + 60 = 0$ **5**

$\Rightarrow (n-4)(2n-15) = 0$

$\Rightarrow n = 4$. ($\because n$ நேர் நிறைவெண்) **5** **25**

---

8 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருந்தபோதிலும் பரீட்சார்த்திகளில் 86% இனர் மட்டுமே விடையளித்துள்ளனர். இதுவும் நிகழ்தகவு தொடர்பான எளிய பிரசினமானதுடன் அதன் இலகுதன்மை 34% ஆகும். இப்பரீட்சார்த்திகளுக்கு முதலாவது பந்து வெள்ளை இரண்டாவது பந்து கறுப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண முடியாது இருந்ததுடன் அதனைப் பெற்ற பரீட்சார்த்திகளுக்கும் சமன்பாட்டை சுருக்கி தீர்வை பெறுவதற்கு முடியாது இருந்தது. எளிய பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு ஈடுபடுத்துவதனால் இந்த பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

வினா இலக்கம் 9

9. 11 இலும் பார்க்கக் குறைந்த மூன்று வேறுவேறான நிறையெண்களின் இடை 7 ஆகும். மேலும் இரு நிறையெண்கள் எடுக்கப்படும்போது எல்லா ஐந்து நிறையெண்களினதும் இடை 5 ஆகும். அத்துடன் இவ்வைந்து நிறையெண்களின் ஒரே ஆகாரம் 3 ஆகும். ஐந்து நிறையெண்களையும் காண்க.

x, y, z என்பன 11 இலும் குறைந்த இடை 7 ஐக் கொண்ட நிறையெண்கள் என்க.

எனவே $\frac{x+y+z}{3} = 7.$ **5**

$\Rightarrow x + y + z = 21$----------(1)

x, y, z என்பன வேறுவேறானவையும் 3 மட்டுமே ஒரே ஒரு ஆகாரமாதலாலும் குறைந்தது இரண்டு நிறையெண்களில் ஒன்று 3 ஆக மேலதிகமாக எடுக்க வேண்டும். மற்றையது t என்க.

ஐந்து நிறையெண்களின் இடை 5 ஆதலால், $\frac{x+y+z+t+3}{5} = 5$ **5**

$\Rightarrow 21 + 3 + t = 25$ **5**

$\Rightarrow \quad t = 1$.

எனவே நிறையெண்களாவன $x, y, z, 3, 1.3$ மட்டுமே ஒரு ஆகாரமாதலாலும் x, y, z வேறுவேறானவையாயும் இருப்பதால் இவற்றுள் ஒன்று சரியாக 3 ஆக இருத்தல் வேண்டும். $z = 3$ என்க.

ஆகவே $(1) \Rightarrow x + y = 18$. ---------- (2) **5**

x, y ஆகிய நிறையெண்கள் 11 இலும் குறைவாதலால், (2) இன் மூலம் பெறப்படுவது $(x = 8, y = 10)$ அல்லது $(x = 10, y = 8)$ எனவே அவ்வெண்களாவன $1, 3, 3, 8, 10$ என்பனவாகும்.

5 **25**

---

9 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருந்தபோதிலும் பரீட்சார்த்திகளில் 80% இனர் மட்டுமே விடையளித்துள்ளனர். கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளுக்கான இடை மற்றும் ஆகாரம் போன்ற அளவீடுகள் இங்கு எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 36% ஆகும்.

தரப்பட்ட தரவுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஐந்து எண்களினதும் இடையை எழுத முடியாமையாலும் எண்களை அறிய சரியான தீர்வுகளை உருவாக்காமையினால் இந்தப் பிரசினத்திற்கு புள்ளிகளைப் பெற முடியாது இருந்தது.

இடை, இடையம், ஆகாரம் என்ற மைய நாட்ட அளவைகள் தொடர்பான பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு மாணவர்களை ஈடுபடுத்துவதனால் இந்த பின்னடைவை இல்லாது செய்யலாம்.

வினா இலக்கம் 10

10. $1, 2, 3, 4, 5$ என இலக்கமிடப்பட்ட ஐந்து சம ஆரைச்சிறைகளைக் கொண்ட ஒரு சுழலும் வட்ட இலக்குப் பலகையில் ஓர் அம்பு எய்யப்படுகின்றது. ஒவ்வோர் ஆரைச்சிறையிலும் அம்பு படும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை பின்வரும் மீடிறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு p, q ஆகியன மாறிலிகள்.

எண்	1	2	3	4	5
மீடிறன்	1	p	q	5	2

மேற்குறித்த தரவுகளின் இடையும் மாறற்றிறனும் முறையே $3, \frac{6}{5}$ எனத் தரப்பட்டிருப்பின், p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இடை $\mu = 3 \Rightarrow \dfrac{1+2p+3q+20+10}{p+q+8} = 3$ **5**

$\Rightarrow 2p+3q+31 = 3p+3q+24$

$\Rightarrow p = 7.$ **5**

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \mu^2$$ **5**

மாறற்றிறன் $= \dfrac{6}{5} \Rightarrow \dfrac{6}{5} = \dfrac{1\cdot 1^2 + 7\cdot 2^2 + q\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2 + 2\cdot 5^2}{q+15} - 3^2$ **5**

$\Rightarrow 51(q+15) = 5(1+28+9q+80+50)$

$\Rightarrow \quad q = 5.$ **5**

25

மாற்று முறை

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad \textbf{5}$$

மாறற்றிறன் $= \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{1(1-3)^2 + 7(2-3)^2 + q(3-3)^2 + 5(4-3)^2 + 2(5-3)^2}{1+7+q+5+2}$ **5**

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{5} = \frac{4+7+5+8}{15+q}$$

$\Rightarrow q = 5.$ **5**

15

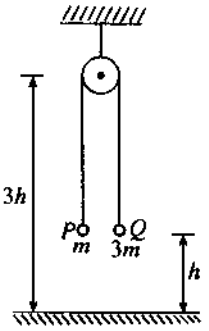
10 ஆம் வினாவிற்கு விடையளித்துள்ளமை தொடர்பான அவதானிப்புகளும் முடிவுகளும்

இவ்வினா கட்டாய வினாவாக இருந்தபோதிலும் பரீட்சார்த்திகளில் 80% இனர் மட்டுமே விடையளித்துள்ளனர். தரப்பட்ட கூட்டமாக்கப்படாத எண் பரம்பலினை அறியாது எண்கள் கணிப்பது இங்கு எதிர்பார்க்கப்படுவதுடன் அதன் இலகுதன்மை 21% ஆகும். எண் பரம்பல் தொடர்பான சகல அவதானிப்புகளுக்குமாக கூற்றுகளை எழுதிக் காட்டுவதற்கு முடியாமையினால் பரீட்சார்த்திகளுக்கு முழுப் புள்ளிகளையும் பெற முடியாது இருந்தது. "மாறற்றிறன்" தொடர்பான வரைவிலக்கணத்தைச் சரியாக பயன்படுத்தி இருக்கவில்லை. தரப்பட்ட எண் பரம்பலிலே $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ அல்லது $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \, x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \mu^2$ என்ற சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்துமாறு பல்வேறு பிரசினங்களை தீர்ப்பதற்கு பயிற்றுவிப்பதன் மூலம் இந்த பின்னடைவை இல்லாது செய்ய முடியும்.

(10) இணைந்த கணிதம் பத்திரம் II - பகுதி B

வினா இலக்கம் 11

11. (*a*) ஒரு மீள்தன்மையில்லாக் கிடை நிலத்திற்கு மேலே ஓர் உயரம் $3h$ இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்கின்ற ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q உடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தொடக்கத்தில் இரு துணிக்கைகளும் நிலத்திற்கு மேலே ஓர் உயரம் h இல் இழை இறுக்கமாக இருக்கத் தாங்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றன (அருகே உள்ள உருவைப் பார்க்க). P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கு நியூற்றனின் இரண்டாம் விதியைத் தனித்தனியாகப் பிரயோகித்து, ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் ஆர்முடுகலின் பருமன் $\frac{g}{2}$ எனக் காட்டுக.

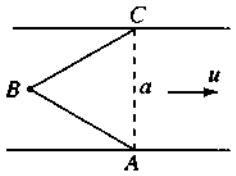


நேரம் t_0 இற்குப் பின்னர் துணிக்கை Q ஆனது நிலத்துடன் மோதி, கணநிலை ஓய்வுக்கு வந்து, மேலும் நேரம் t_1 இற்கு ஓய்வில் இருந்து, மேல்நோக்கி இயங்கத் தொடங்குகின்றது. துணிக்கை Q மேல்நோக்கி இயங்கத் தொடங்கும் வரைக்கும் P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளினதும் இயக்கங்களுக்குரிய வேக-நேர வரைபுகளைப் பரும்படியாகத் தனித்தனியாக வரைக.

இவ்வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி $t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$ எனக் காட்டி, t_1 ஐ g, h ஆகியவற்றின் சார்பிற் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது நிலத்திற்கு மேலே ஓர் உயர்ந்தபட்ச உயரம் $\frac{5h}{2}$ ஐ அடையுமென மேலும் காட்டுக.

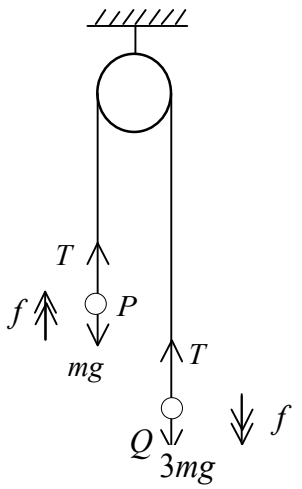
(*b*) அகலம் a ஐ உடைய ஒரு நேர் ஆறு சீரான கதி u உடன் பாய்கின்றது. ஆறு பாயும் திசைக்குக் கோடு AC செங்குத்தாக இருக்கத்தக்கதாக A, C ஆகிய புள்ளிகள் ஆற்றின் எதிர்க் கரைகளில் உள்ளன. மேலும், ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணியாக இருக்குமாறு ஒரு நிலையான மிதவை B ஆனது AC இன் ஆற்றோட்டத்தின் எதிர்த் திசைப் பக்கத்தில் ஆற்றின் நடுவில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது (அருகே உள்ள உருவைப் பார்க்க). நீர் தொடர்பாகக் கதி $v\ (>u)$ உடன் இயங்கும் படகு ஒன்று A இலிருந்து புறப்பட்டு B ஐ அடையும் வரைக்கும் இயங்குகின்றது. பின்னர் அது B இலிருந்து C வரைக்கும் இயங்குகின்றது. A இலிருந்து B வரைக்கும் B இலிருந்து C வரைக்கும் படகின் இயக்கங்களுக்கான வேக முக்கோணிகளைப் பரும்படியாக வரைக.



A இலிருந்து B வரைக்குமான இயக்கத்தில் படகின் கதி $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2-u^2}-\sqrt{3}u\right)$ எனக் காட்டி, B இலிருந்து C வரைக்குமான இயக்கத்தில் அதன் கதியைக் காண்க.

இதிலிருந்து, AB, BC ஆகிய பாதைகளுக்குப் படகு எடுக்கும் மொத்த நேரம் $\frac{a\sqrt{4v^2-u^2}}{2}$ எனக் காட்டுக.

(a)



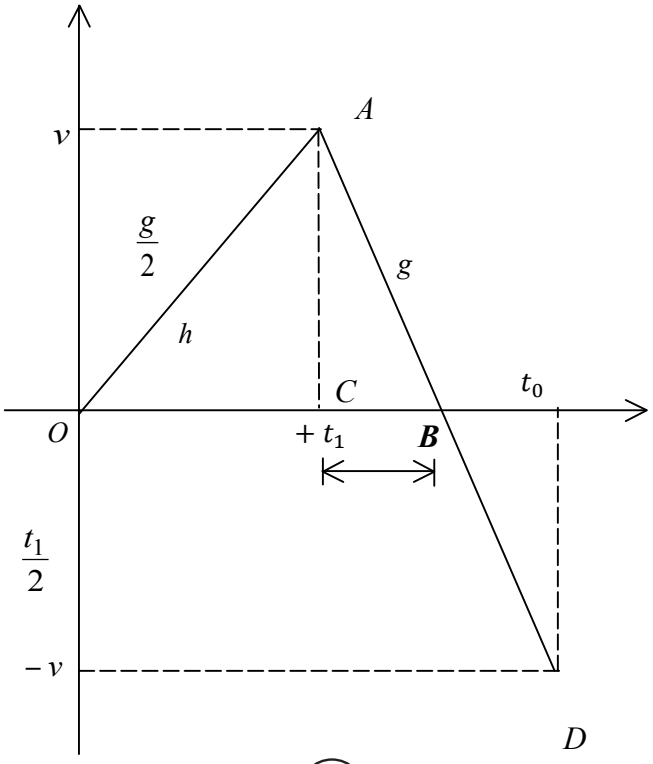
$\underline{F} = m\underline{a}$ ஐப் பிரயோகிக்க.

$Q(3m)$ இற்கு $\downarrow\ 3mg - T = 3mf$ **5**

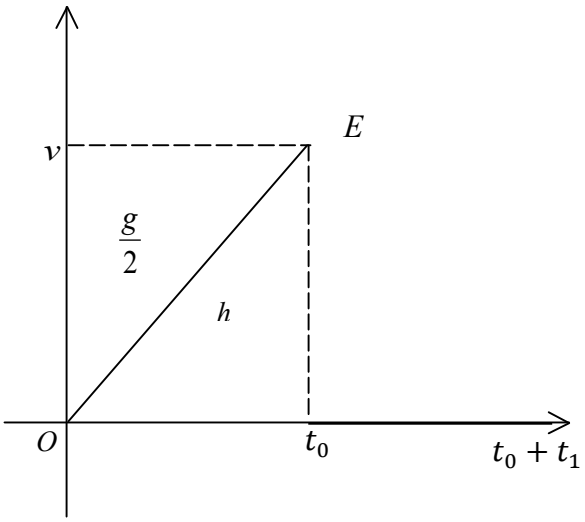
$P(m)$ இற்கு $\uparrow\ T - mg = mf$ **5**

$2mg = 4mf$

$\Rightarrow f = \frac{g}{2}.$ **5**



15



10

P துணிக்கை

Q துணிக்கை

40

OA அல்லது *OE* இற்கு கீழான பரப்பு $= \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot v = h$ ---------- (1) **5**

OA அல்லது *OE* இன் படித்திறன் $= \frac{v}{t_0} = \frac{g}{2}$ ---------- (2) **5**

(1) × (2) $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot \frac{g t_0}{2} = h$ **5**

$\Rightarrow t_0^2 = \frac{4h}{g}$

$\Rightarrow t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$.

15

---

(2) $\Rightarrow v = \frac{g}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{gh}$ **5**

வரைபிலிருந்து,

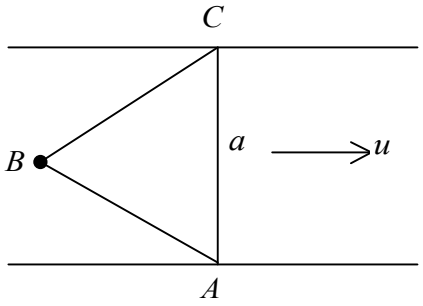
P இன் புவியீர்ப்பின் கீழான இயக்கத்திற்கு எடுத்த நேரம் $= \frac{2v}{g}$

$$\therefore \quad t_1 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$ (5) **10**

P அடைந்த அதியுயர் உயரம் $= \frac{1}{2} \cdot v \cdot \frac{t}{2} = \frac{1}{2}h$ (5)

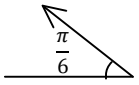
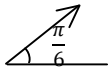
நில மட்டத்திற்கு மேல் மொத்த உயரம் $= h + h + \frac{h}{2} = \frac{5h}{2}$ (5) **10**

(*b*)



$\underline{V}(B,W) = v$

$\underline{V}(W,E) = u \rightarrow$

$\underline{V}(B,E) =$  AB இற்கு  BC இற்கு (5)

$\underline{V}(B,E) = \underline{V}(B,W) + \underline{V}(W,E)$

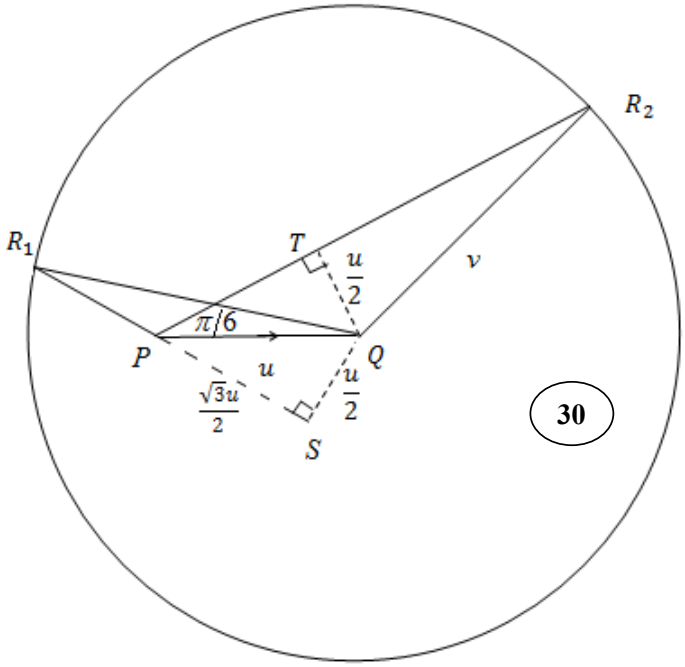
$= \underline{V}(W,E) + \underline{V}(B,W)$

(5)

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$

$= \overrightarrow{PR_i}$, i= 1,2, இங்கு முறையே $AB//PR_1$, $BC//PR_2$.

(5) (5) **20**



30

$\underline{AB}$ இற்கு ΔPQR_1

$$R_1S = \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{4}}$$

$$PR_1 = R_1S - PS$$ **5**

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u\right).$$ **5**

$\underline{BC}$ இற்கு : ΔPQR_2

$$PR_2 = PT + TR_2$$

$$= \frac{\sqrt{3}u}{2} + \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{4}}$$ **5**

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4v^2 - u^2} + \sqrt{3}u\right)$$ **5**

$$PR_1 . PR_2 = \frac{1}{4}\left(4v^2 - u^2 - 3u^2\right)$$

$$PR_1 + PR_2 = \sqrt{4v^2 - u^2}$$

$$PR_1 \cdot PR_2 = v^2 - u^2$$

மொத்த நேரம் $= \frac{a}{PR_1} + \frac{a}{PR_2}$

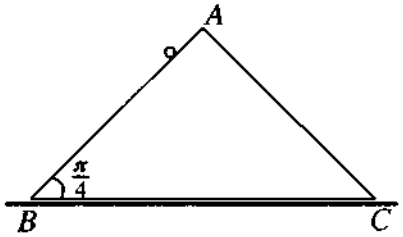
$$= a\frac{(PR_1 + PR_2)}{PR_1 . PR_2}$$

$$= a\frac{\sqrt{4v^2 - u^2}}{(v^2 - u^2)}.$$ **5**

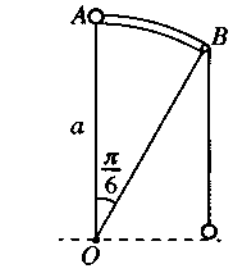
25

---

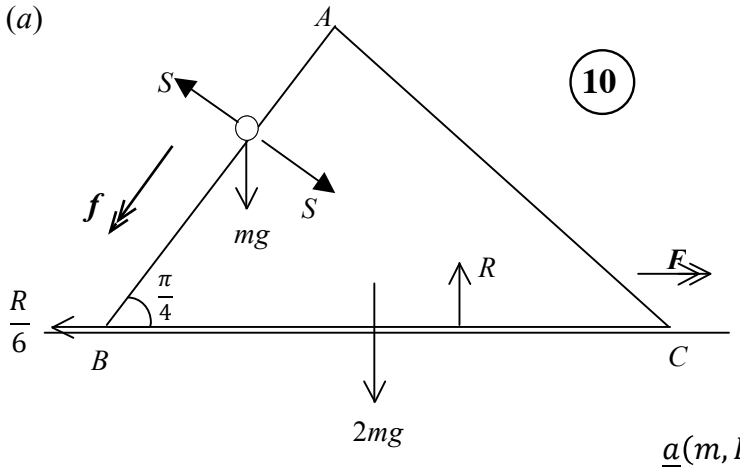
12. (a) உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC ஆனது திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக உள்ள ஒரு நிலைக்குத்தான குறுக்குவெட்டாகும். கோடு AB ஆனது அதனைக் கொண்டுள்ள முகத்தின் அதியுயர் சரிவுக் கோடும் $A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$ உம் ஆகும். BC ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஒரு கரடான கிடை நிலத்தின் மீது இருக்குமாறு ஆப்பு வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஒப்பமானது. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை உருவிற் காணப்படுகின்றவாறு AB மீது தூங்கப்பட்டு, தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. ஆப்பு $\overrightarrow{BC}$ இன் திசையில் இயங்குகின்றது எனவும் நிலத்தினால் ஆப்பு மீது உஞற்றப்படும் உராய்வு விசையின் பருமன் $\frac{R}{6}$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு R ஆனது நிலத்தினால் ஆப்பு மீது உஞற்றப்படும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தின் பருமனாகும். R ஐ m, g ஆகியவற்றின் சார்பில் துணிவதற்குப் போதுமான சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



(b) உருவில் OAB ஆனது OA நிலைக்குத்தாக இருக்கும் மையம் O இல் ஒரு கோணம் $\frac{\pi}{6}$ ஐ எதிரமைக்கும் ஆரை a ஐ உடைய ஒரு வட்ட ஆரைச்சிறையாகும். அது அதன் அச்சு கிடையாக இருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் ஒப்பமான உருளை ஆரைச்சிறையின் அச்சுக்குச் செங்குத்தான குறுக்குவெட்டாகும். B இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்கின்ற ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை அதன் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை Q உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காணப்படுகின்றவாறு தொடக்கத்தில் துணிக்கை P ஆனது A இல் தாங்கப்படும் அதே வேளை துணிக்கை Qஆனது O இன் கிடை மட்டத்தில் சுயாதீனமாகத் தொங்குகின்றது. இழை இறுக்கமாக இருக்க, இத்தானத்திலிருந்து தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. OP ஆனது மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$ ஐ ஆக்கும்போது $2a\dot{\theta}^2 = 3g(1 - \cos\theta) + g\theta$ எனவும் இழையில் உள்ள இழுவை $\frac{3}{4}mg(1 - \sin\theta)$ எனவும் காட்டி, துணிக்கை P மீதுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



(a)

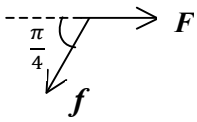


10

$\underline{a}(2m, E) = \boldsymbol{F}$ →

$\underline{a}(m, 2m) = \boldsymbol{f}$ ↙

$\underline{a}(m, E) = \underline{a}(m, 2m) + \underline{a}(2m, E)$

$=$ 

10

$\underline{F} = m\underline{a}$ ஐப் பிரயோகிக்க.

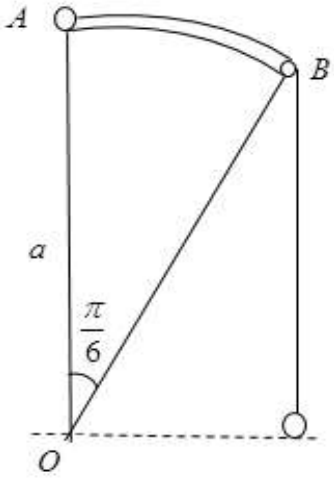
(i) P துணிக்கைக்கு ↙ $mg\frac{\sqrt{2}}{2} = m\left(f - F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ **15**

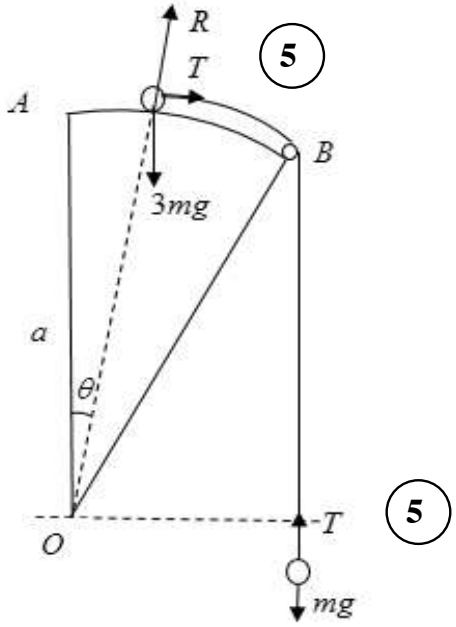
(ii) தொகுதிக்கு → $\frac{-R}{6} = 2mF + m\left(F - \frac{f}{\sqrt{2}}\right)$ **15**

(iii) தொகுதிக்கு ↑ $R - 3mg = -m\frac{f}{\sqrt{2}}$ **10**

60

(*b*)





5

5

சக்திக் காப்பு விதிப்படி

$3mga = 3mga\cos\theta - mga\theta + \frac{1}{2}(3m)(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(m)(a\dot{\theta})^2$ **25**

(PE = 10, KE = 10, Eqn = 05)

$2a\dot{\theta}^2 = 3g(1 - \cos\theta) + g\theta$ **5**

40

$\underline{F} = m\underline{a}$ பிரயோகிக்க

P இற்கு ↘ $\quad T + 3mg\sin\theta = 3mf$ -------- (1) **15**

Q இற்கு ↓ $\quad mg - T \quad = mf$ -------- (2) **10**

By (1) , (2) இன்

$$3mg - 3T = T + 3mg\sin\theta$$

$$4T = 3mg(1 - \sin\theta) \quad \textbf{05}$$

$$T = \tfrac{3mg}{4}(1 - \sin\theta) \qquad \textbf{30}$$

$\underline{F} = m\underline{a}$, P க்கு பிரயோக்க

↙ $\quad 3mg\cos\theta - R = 3ma\dot{\theta}^2$ **10**

$R = 3mg\cos\theta - \tfrac{3m}{2}\{3g(1 - \cos\theta) + g\theta\}$ **10**

$$= \tfrac{3mg}{2}(2\cos\theta - 3 + 3\cos\theta - \theta)$$

$$= \tfrac{3mg}{2}(5\cos\theta - \theta - 3)$$

20

குறிப்பு :

$0 < \theta < \tfrac{\pi}{6}$ இற்கு P மேற்பரப்பை விட்டு விலகாது

$$R|_{\theta=0} = 3mg > 0$$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{3mg}{2}(-5\sin\theta - 1) < 0 \; for \; 0 < \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$R|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{3mg}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - 3\right) > 0$$

வினா இலக்கம் 13

13. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை P ஆனது O இல் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை P புள்ளி A இனூடாகச் செல்லும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க; இங்கு $OA = a$.

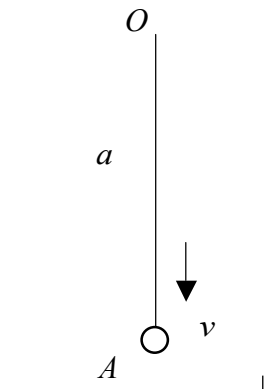
இழையின் நீளம் $x\,(\geq a)$ ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக. $X = x - \frac{5a}{4}$ எனக் கொண்டு மேற்குறித்த சமன்பாட்டை வடிவம் $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $\omega\,(> 0)$ ஆனது துணியப்பட வேண்டிய ஒரு மாறிலியாகும்.

இச்சமன்பாடு $\dot{X}^2 = \omega^2\left(c^2 - X^2\right)$ ஐத் தருகின்றதெனக் கொண்டு, இவ்வெளிய இசை இயக்கத்தின் வீச்சம் c ஐக் காண்க.

துணிக்கை P அடையும் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி L எனக் கொள்வோம். A இலிருந்து L இற்கு இயங்குவதற்கு P எடுக்கும் நேரம் $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது L இல் இருக்கும் கணத்தில் திணிவு $\lambda m\,(1 \leq \lambda < 3)$ ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை மெதுவாக P உடன் இணைக்கப்படுகின்றது. திணிவு $(1 + \lambda)\,m$ ஐ உடைய சேர்த்தித் துணிக்கையின் இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5 + \lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$ எனக் காட்டுக.

சேர்த்தித் துணிக்கை வீச்சம் $(3 - \lambda)\frac{a}{4}$ உடன் முழு எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றதென மேலும் காட்டுக.

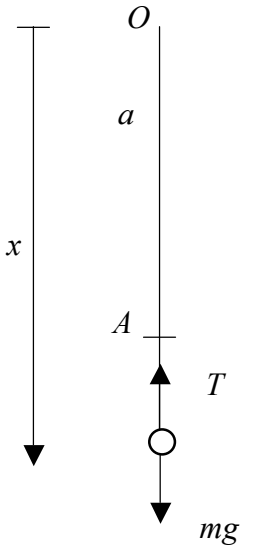


புவியீர்ப்பின் கீழான P இன் இயக்கத்திற்கு O இலிருந்து A இற்கு:

$\downarrow\ v^2 = 2ga \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ag}\,.$ **5**

இழையில் இழுவை : $T = \frac{4mg(x-a)}{a}\ ,x \geq a$ **5**

$\downarrow\ F = ma \ : \ -T + mg = m\ddot{x}$ **5**



T ஐ நீக்க : $-4mg\frac{(x-a)}{a} + mg = m\ddot{x}$ **5**

$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{4g}{a}(x-a) = \frac{4g}{a}.\frac{a}{4}$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$---------- (1) **5**

$X = x - \frac{5a}{4} \Rightarrow \dot{X} = \dot{x} \quad , \quad \ddot{X} = \ddot{x}.$ **5**

(1) இன் $\ddot{X} + \frac{4g}{a} X = 0.$

மேலும் $\ddot{X} + \omega^2 X = 0;$ இங்கு $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$ $(\because \omega > 0)$

5 **5**

40

$\Rightarrow \dot{X}^2 = \omega^2 (c^2 - X^2)$ ---------- (2)

$x = a$ ஆகும்போது $\dot{x} = \sqrt{2ga} \quad \Rightarrow \dot{X}^2 = 2ga, \quad X = -\frac{a}{4}$

5 **5**

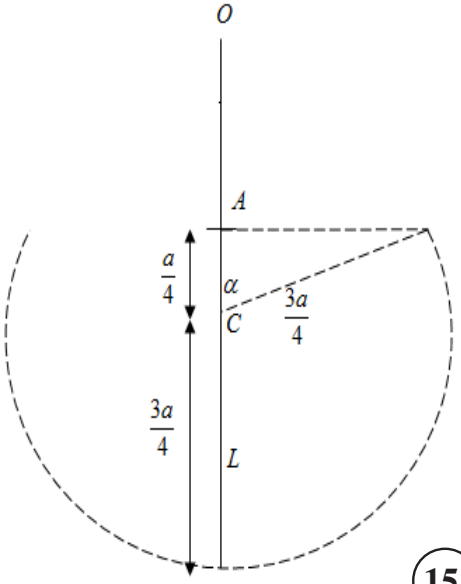
$(2) \Rightarrow 2ga = \frac{4g}{a}\left[c^2 - \left(\frac{-a}{4}\right)^2\right]$ **5**

$\Rightarrow a^2 = 2c^2 - \frac{a^2}{8} \Rightarrow c^2 = \frac{9a^2}{16}$

$\Rightarrow c = \frac{3a}{4} \quad (\because c > 0)$ **5**

இயக்க மையம் $X = 0 \; ; \quad x = \frac{5a}{4}.$ **5**

25



15

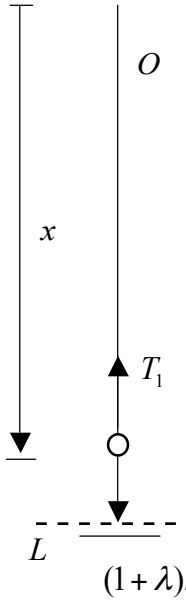
$AL = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} = a.$ **5**

$\cos \alpha = \frac{1}{3}$ **5**

A இலிருந்து L இற்கு எடுத்த நேரம் $= \frac{\pi - \alpha}{\omega}$ **5**

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}.$ **5**

35



$$T_1 = \frac{4mg(x-a)}{a}$$

↓ கூட்டுத் துணிக்கை $\quad \underline{F} = m\underline{a} : (1+\lambda)mg - T_1 = (1+\lambda)m\ddot{x}$

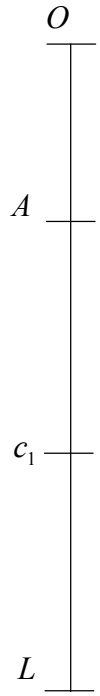
$$(1+\lambda)mg - \frac{4mg}{a}(x-a) = (1+\lambda)m\ddot{x} \qquad \textbf{10}$$

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}(x-a) - g = 0 \qquad \textbf{5}$$

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{(x-a) - (1+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0 \qquad \textbf{5}$$

$$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0 \qquad \textbf{5}$$

25



மையம் $\quad C_1 :\ x = OC_1 = (5+\lambda)\frac{a}{4}$ **5**

$$C_1L = 2a - (5+\lambda)\frac{a}{4} \qquad \textbf{5}$$

$$= (3-\lambda)\frac{a}{4} \qquad \textbf{5}$$

புதிய வீச்சம் $\quad c_1 = (3-\lambda)\frac{a}{4} \quad (>0) \ \because \lambda < 3.$

பூரண எ.இ.இ. ஆக இருந்தால் மட்டுமே $\Leftrightarrow$

$$AC_1 \geq c_1 \qquad \textbf{5}$$

$$(5+\lambda)\frac{a}{4} - a \geq (3-\lambda)\frac{a}{4}$$

$$5 + \lambda - 4 \geq 3 - \lambda$$

$$\lambda \geq 1 \qquad \textbf{5}$$

25

மற்றுமுறை:

$X = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ என்க. இங்கு A, B தீர்மானிக்கப்பட வேண்டியவை.

$\Rightarrow \dot{X} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t.$ **5**

$t = 0$, $x = a$ ஆகும்போது $X = -\frac{a}{4}$, $\dot{X} = V = \sqrt{2ga}$.

5 **5**

$\therefore \quad -\frac{a}{4} = A, \; V = B\omega \Rightarrow B = \frac{V}{\omega}$

5 **5**

தீர்வு $X = -\frac{a}{4}\cos\omega t + \frac{V}{\omega}\sin\omega t.$

25

வகையிட : $\dot{X} = \frac{a\omega}{4}\sin\omega t + V\cos\omega t.$ **5**

$\dot{X} = 0$ ஆக அதிதாழ் புள்ளி L ஐ முதலில் அடையும் : **5**

$t = t_1,$

$\tan\omega t_1 = -\frac{4V}{a\omega}$ **5**

$\omega t_1 = \pi - \alpha$ **5**

$\tan\alpha = \frac{4V}{a\omega}$; இங்கு $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

SHS இன் மையம் $x = \frac{5a}{4}$ அல்லது $C = \frac{a}{4}$ **5**

$$\frac{a}{4} = c\cos\alpha = \frac{c(a\omega)}{\sqrt{16V^2 + a^2\omega^2}}$$

$$= c.\frac{2\sqrt{ga}}{\sqrt{16\times 2ga + 4ga}} = \frac{1}{3}c$$ **5**

$$\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$$

மேலும்

$$\omega t_1 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}. \quad (5)$$

35

வினா இலக்கம் 14

14. (*a*) உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகும்; இங்கு O, A, B ஆகியன **ஒரேகோட்டில் இருப்பதில்லை.** C என்பது $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் D என்பது $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ஆகியவற்றை $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைப்பதன் மூலம் $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ எனக் காட்டுக.

P, Q என்பன முறையே AB, OD ஆகியவற்றின் மீது $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ ஆகவும் $\overrightarrow{OQ} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OD}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளிகளெனக் கொள்வோம்; இங்கு $0 < \lambda < 1$ ஆகும். $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ எனக் காட்டுக.

(*b*) ஓர் இணைகரம் $ABCD$ இல் $AB = 2\,\text{m}$, $AD = 1\,\text{m}$ எனவும் $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ எனவும் கொள்வோம். மேலும் CD இன் நடுப் புள்ளி E எனவும் கொள்வோம். AB, BC, DC, DA, BE ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினாற் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே $5, 5, 2, 4, 3$ நியூற்றன் பருமன்களை உடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுள் விசை $\overrightarrow{AE}$ இற்குச் சமாந்தரமானதெனக் காட்டி, அதன் பருமனைக் காண்க.

விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோடு நீட்டப்பட்ட AB ஐ B இலிருந்து தூரம் $\frac{3}{2}\,\text{m}$ இல் சந்திக்கின்றது எனவும் காட்டுக.

C இனூடாகத் தாக்கும் ஒரு மேலதிக விசை இப்போது மேற்குறித்த விசைத் தொகுதியுடன், புதிய தொகுதியின் விளையுள் விசை $\overrightarrow{AE}$ வழியே இருக்கத்தக்கதாக, சேர்க்கப்படுகின்றது. மேலதிக விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

(*a*)

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ ஆக

$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{\underline{b}}{3}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2}$ **5**

5

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$

$= -\underline{a} + \frac{\underline{b}}{2} - \frac{\underline{a}}{2}$

$= \frac{3}{2}\left(-\underline{a} + \frac{\underline{b}}{3}\right)$ ---------- (1) **5**

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\underline{a} + \frac{\underline{b}}{3}$---------- (2) **5**

(1), (2) மூலம் $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ **5**

25

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\lambda\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ **5**

$= -\lambda(\underline{b} - \underline{a}) - \underline{a} + \underline{c}$ **5**

$= (\lambda - 1)\underline{a} - \lambda\underline{b} + \frac{\underline{b}}{3}$

$= (\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}$------- (3) **5**

$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OQ}$ **5**

$= -\overrightarrow{OC} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OD}$

$= -\frac{\underline{b}}{3} + (1 - \lambda)\frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$ **5**

$= \frac{1}{2}\left[(\lambda - 1)\underline{a} - \frac{3}{2}\underline{b} + \underline{b} - \lambda\underline{b}\right]$

$= \frac{1}{2}\left((\lambda - 1)\underline{a} + \frac{1}{3}(1 - 3\lambda)\underline{b}\right)$---------(4) **5**

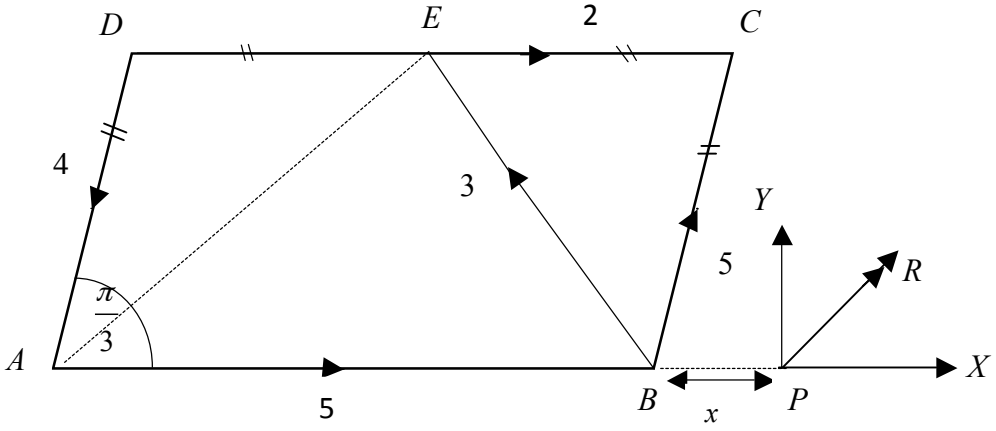
(3), (4) மூலம் $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ **5**

35

---

10 தரப்பட்ட விசையைக் குறிப்பதற்கு

(*b*)



10

சமாந்தரமாக $\overrightarrow{AE}$ இற்கு // $-4\cos\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{6}$ **10**

$= 4\sqrt{3}\text{N}$ **5**

AE திசைக்கு செங்குத்தாக : E: = 3 $-4\sin\frac{\pi}{6} + 5\sin\frac{\pi}{6} - 5\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6}$ **10**

A

$= 3 - 2 + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} - 1$

$= 0$ **5**

விளையுள் விசையின் பருமன் $R = 4\sqrt{3}\text{N}$, $\overrightarrow{AE}$ இற்குச் சமாந்தரம் ஆகும். **10**

40

மாற்றுமுறை

AB யின் $\rightarrow X = 5 + \frac{5}{2} + 2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = 6N$ **10**

AB செங்குத்தாக $Y: \frac{\sqrt{3}}{2}(5+3) - \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}N$ **10**

$\frac{Y}{X} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$ **5**

விளையுள்ளின் $R = 2\sqrt{3}\sqrt{3+1} = 4\sqrt{3}N,$ **5**

செயற்பாட்டுக் கோடு AB உடனான கோணம் $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ ∴ அது AE இற்கு சமாந்தரமாகும். **5**

5

40

நீட்டப்பட்ட AB ஐ விளையுள் சந்திக்கும் புள்ளி P என்க.

B

$Yx = 4\times2\sin\frac{\pi}{3} - 2\times1\sin\frac{\pi}{3}$ **10**

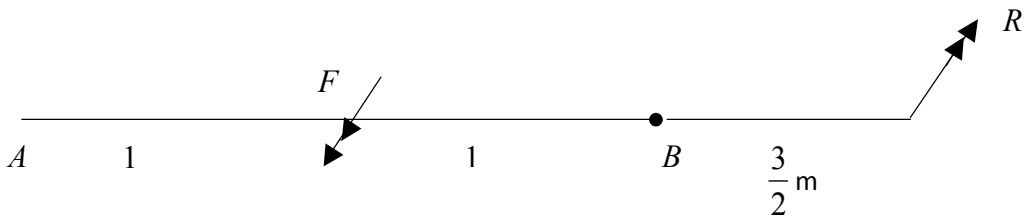
$2\sqrt{3}\,x = 3\sqrt{3}$

$x = \frac{3}{2}$ m. **5**

15

$BP, \quad x = \frac{3}{2}$m.

மேலதிக விசை $\overrightarrow{EA}$ இற்கு சமாந்தரம் **5**



A $R\times\left(2+\frac{3}{2}\right)\sin30^\circ = F.1\sin30^\circ$ **15**

$4\sqrt{3}\times\frac{7}{2} = F$

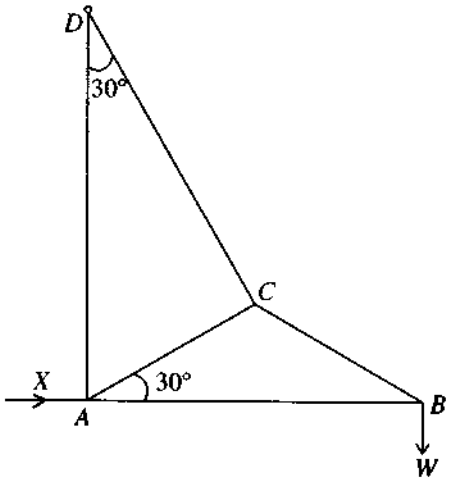
$F = 14\sqrt{3}N.$ **5**

25

---

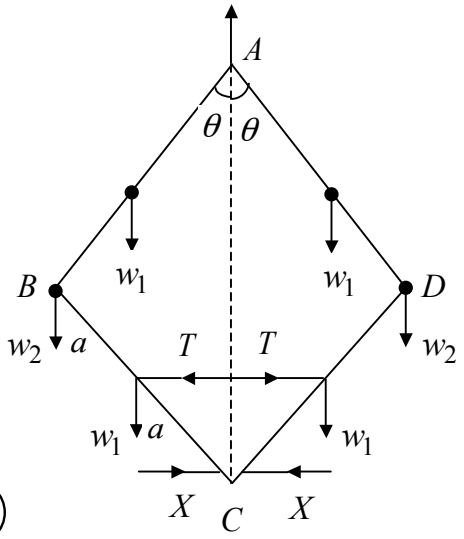
15. (*a*) ஒவ்வொன்றும் நிறை w_1 ஐ உடைய நான்கு சீரான சம கோல்கள் ஒரு சாய்சதுரம் $ABCD$ ஐ ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC, CD ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகள், $B\hat{A}D = 2\theta$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, ஓர் இலேசான கோலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. B, D ஆகிய மூட்டுகள் ஒவ்வொன்றும் w_2 என்னும் சம சுமைகளைக் காவுகின்றன. இத்தொகுதி மூட்டு A இலிருந்து சமச்சீராகத் தொங்கிக்கொண்டு, இலேசான கோல் கிடையாக இருக்க ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. இலேசான கோலில் உள்ள உதைப்பு $2(2w_1 + w_2)\tan\theta$ எனக் காட்டுக.

(*b*) AB, BC, CD, AC, AD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களை அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டி உருவிற் காணப்படும் சட்டப்படல் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. $AC = CB$, $B\hat{A}C = 30° = A\hat{D}C$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் D இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டு B இல் ஒரு நிறை W தொங்கவிடப்பட்டு, A இல் தாக்கும் பருமன் X ஐ உடைய ஒரு கிடை விசையினால் AB கிடையாகவும் AD நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கச் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் பேணப்படுகிறது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் B, C, A ஆகிய மூட்டுகளுக்குத் தகைப்பு வரிப்படங்களை ஒரே உருவில் வரைக.



இதிலிருந்து, X இன் பெறுமானத்தையும் எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளையும், இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி, காண்க.

(*a*)



சமநிலையில் **5**

ஒவ்வொரு பாரமான கோலின் நீளமும் 2a என்க.

B ↶ BC இற்கு : $X \times 2a\cos\theta - w_1 \times a\sin\theta - T \times a\cos\theta = 0$. **10**

$\Rightarrow 2X - T = w_1 \tan\theta$---------- (1) **5**

A ↶ AB, BC இற்கு

$X \times 4a\cos\theta + 2w_1 \times a\sin\theta + w_2 \times 2a\sin\theta - T \times 3a\cos\theta = 0$. **20**

$\Rightarrow 4X - 3T = -2(w_1 + w_2)\tan\theta$---------- (2) **5**

(1) $\times 2$ - (2) $\Rightarrow T = 2w_1 \tan\theta + (2w_1 + w_2)\tan\theta$

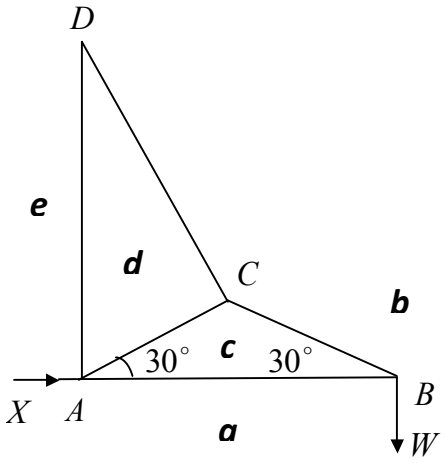
$= (4w_1 + 2w_2)\tan\theta$

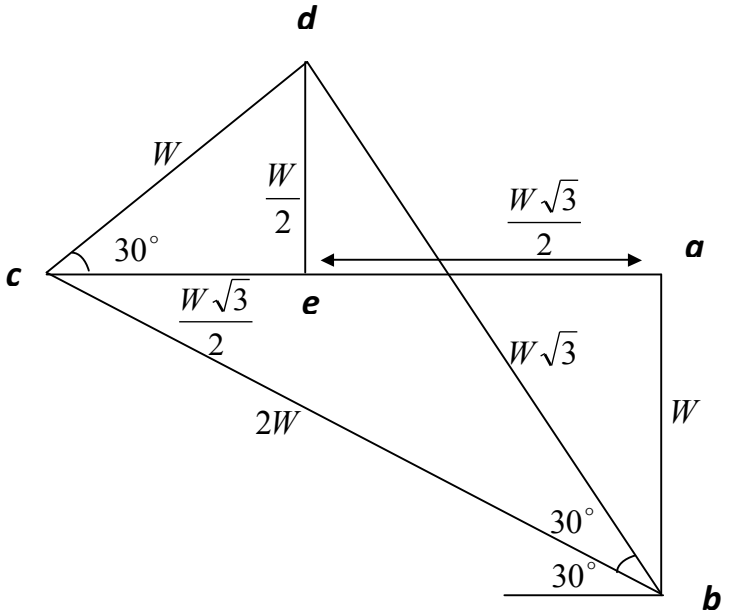
$= 2(2w_1 + w_2)\tan\theta$ **10**

65

(*b*)

கோல்	பருமன்	இழுவை/ உதைப்பு	
BC(***bc***)	$2W$	இழுவை	**10**
AB(***ca***)	$\sqrt{3}W$	உதைப்பு	**10**
CD(***bd***)	$\sqrt{3}W$	இழுவை	**10**
AC(***dc***)	W	இழுவை	**10**
AD(***de***)	$\frac{W}{2}$	உதைப்பு	**10**
$X(\boldsymbol{ea}) = \frac{W\sqrt{3}}{2}$			**5**





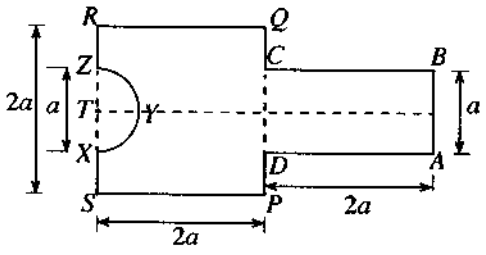
30

85

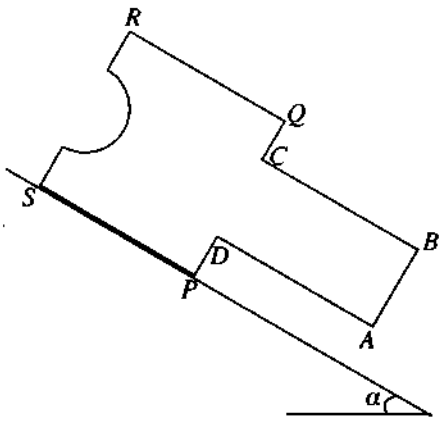
வினா இலக்கம் 16

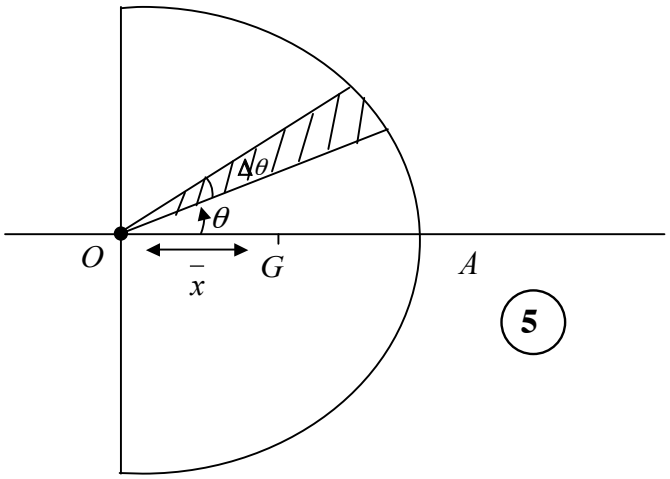
16. ஆரை r ஐயும் மையம் O ஐயும் உடைய ஒரு சீரான அரைவட்ட அடரின் திணிவு மையம் O இலிருந்து தூரம் $\frac{4r}{3\pi}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

அருகே உள்ள உருவிற் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சீரான தள அடர் L ஆனது ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ ஐ ஒரு சதுரம் $PQRS$ உடன், DC உம் PQ உம் அவற்றின் நடுப் புள்ளிகள் பொருந்தி ஒரே கோட்டில் இருக்குமாறு, விறைப்பாக இணைத்து RS இன் நடுப் புள்ளி T இல் மையம் இருக்கும் ஆரை $\frac{a}{2}$ ஐ உடைய ஓர் அரைவட்டப் பிரதேசம் XYZ ஐ அகற்றுவதன் மூலம் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. $AB = a$ எனவும் $AD = PQ = 2a$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. அடர் L இன் திணிவு மையம் சமச்சீரச்சின் மீது RS இலிருந்து தூரம் ka இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $k = \frac{238}{3(48-\pi)}$.



அருகே உள்ள உருவில் காணப்படுகின்றவாறு அடர் L ஆனது கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்த ஒரு கரடான தளத்தின் மீது, அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் S இற்குக் கீழே புள்ளி P இருக்குமாறு ஓரம் PS ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டின் மீதும் இருக்குமாறு, நாப்பத்தில் உள்ளது. $\tan\alpha < (2-k)$ எனவும் $\mu \geq \tan\alpha$ எனவும் காட்டுக; இங்கு μ ஆனது அடருக்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகமாகும்.





5

சமச்சீரின் படி OA இல் கிடக்கும்

5

ஓர் அலகு பரப்பிற்கான திணிவு σ என்க.

$$\Delta m = \frac{1}{2} r^2 (\Delta\theta)\sigma.$$

(5) $\bar{x} = \dfrac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \sigma \frac{2}{3} r\cos\theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2} r^2 \sigma}$ **10** **5**

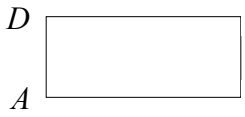
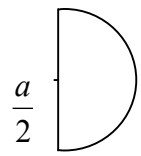
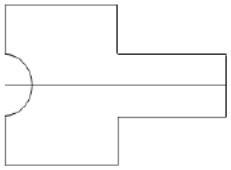
$$= \frac{2r}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2r}{3\pi} \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad \textbf{5}$$

$$= \frac{2r}{3\pi} \left[2\sin\frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{4r}{3\pi}. \quad \textbf{5}$$

அடரின் மையத் தூரம் $= \dfrac{4r}{3\pi}$ **40**

பொருள்	திணிவு	*RS* இல் இருந்தான திணிவு மையதூரம் (→)	
	$2a^2\sigma$	$3a$	**10**
	$4a^2\sigma$	a	**10**
	$\frac{1}{2} \cdot \pi \times \frac{a^2}{4}\sigma$	$\frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2a}{3\pi}$	**10**
	$\left(6 - \frac{\pi}{8}\right) a^2\sigma$	$\bar{x}_1$	**5**

திணிவு மைய வரைவிலக்கணப்படி

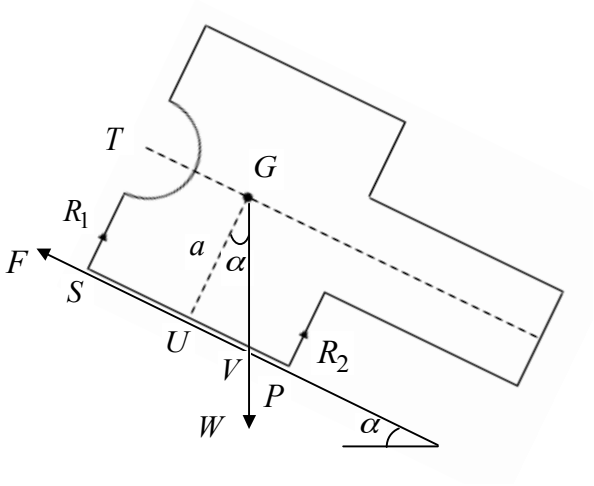
$$\frac{a^2\sigma}{8}(48-\pi)\bar{x}_1 = 2a^2\sigma \times 3a + 4a^2\sigma \times a - \frac{\pi a^2}{8}\sigma \times \frac{2a}{3\pi} \qquad \textbf{(10)}$$

$$\frac{(48-\pi)}{8}\bar{x}_1 = \left(10 - \frac{1}{2}\right)a$$

$$\frac{(48-\pi)}{8}\bar{x}_1 = \frac{119}{12}a$$

$$\therefore \bar{x}_1 = \frac{238}{3(48-\pi)}a \qquad \textbf{(5)}$$

$$= k\,a. \qquad \textbf{50}$$



(10)

PS ஆனது தளத்துடன் தொடுகையில் இருப்பதால் $UV < UP$ **(10)**

$$a\tan\alpha < 2a - ka.$$

$$\Rightarrow \tan\alpha < (2-k).(k < 2.) \qquad \textbf{(10)}$$

$$R_1 + R_2 = w\cos\alpha \qquad \textbf{(10)}$$

$$F = w\sin\alpha \qquad \textbf{(5)}$$

L வழுக்காது இருப்பதால் $\mu \geq \frac{F}{R_1 + R_2}$. **(10)**

$$\Rightarrow \mu \geq \tan\alpha. \qquad \textbf{(5)}$$

60

வினா இலக்கம் 17

17. (*a*) ஒரு கோடாத சதுரமுகித் தாயக் கட்டை A அதன் ஆறு தனித்தனி முகங்களின் மீது $1, 2, 3, 3, 4, 5$ ஆகியவற்றைக் காட்டுகின்றது. தாயக் கட்டை A இரு தடவை மேலே எறியப்படுகின்றது. பெறப்படும் இரு எண்களினதும் கூட்டுத்தொகை 6 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

முகங்களின் மீது உள்ள எண்கள் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் A இற்குச் சர்வசமனான வேறொரு தாயக் கட்டை B அதன் ஆறு தனித்தனி முகங்களின் மீது $2, 2, 3, 4, 4, 5$ ஆகியவற்றைக் காட்டுகின்றது. தாயக் கட்டை B இரு தடவை மேலே எறியப்படுகின்றது. பெறப்படும் இரு எண்களினதும் கூட்டுத்தொகை 6 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

இப்போது A, B ஆகிய இரு தாயக் கட்டைகளும் ஒரு பெட்டியில் இடப்படுகின்றன. பெட்டியிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு தாயக் கட்டை வெளியே எடுக்கப்பட்டு இரு தடவை மேலே எறியப்படுகின்றது. பெறப்படும் இரு எண்களினதும் கூட்டுத்தொகை 6 எனத் தரப்பட்டிருக்கும்போது, பெட்டியிலிருந்து வெளியே எடுக்கப்பட்ட தாயக் கட்டை A ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்னும் n எண்களின் இடையும் நியம விலகலும் முறையே μ_1 உம் σ_1 உம் $y_1, y_2, \ldots, y_m$ என்னும் m எண்களின் இடையும் நியம விலகலும் முறையே μ_2 உம் σ_2 உம் ஆகும். இவ்வெல்லா $n+m$ எண்களினதும் இடையும் நியம விலகலும் முறையே μ_3 உம் σ_3 உம் ஆகுமெனக் கொள்வோம்.

$\mu_3 = \dfrac{n\mu_1 + m\mu_2}{n+m}$ எனக் காட்டுக.

$d_1 = \mu_3 - \mu_1$ எனக் கொள்வோம். $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_3\right)^2 = n\left(\sigma_1^2 + d_1^2\right)$ எனக் காட்டுக.

$d_2 = \mu_3 - \mu_2$ என எடுப்பதன் மூலம் $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(y_j - \mu_3\right)^2$ இற்கு ஓர் இயல்பொத்த கோவையை எழுதுக.

$\sigma_3^2 = \dfrac{\left(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2\right) + \left(nd_1^2 + md_2^2\right)}{n+m}$ என உய்த்தறிக.

ஒரு புதிய புத்தகத்தை வெளியிட்ட பின்னர் முதல் 100 நாட்களின்போது ஒரு நாளிற்கு விற்கப்படும் பிரதிகளின் எண்ணிக்கையின் இடை 2.3 உம் மாறற்றிறன் 0.8 உம் ஆகும். அடுத்த 100 நாட்களின்போது ஒரு நாளிற்கு விற்கப்படும் பிரதிகளின் எண்ணிக்கையின் இடை 1.7 உம் மாறற்றிறன் 0.5 உம் ஆகும். முதல் 200 நாட்களின்போது ஒரு நாளிற்கு விற்கப்படும் பிரதிகளின் எண்ணிக்கையின் இடையையும் மாறற்றிறனையும் காண்க.

(a) தாயக்கட்டையின் எறிதலின் போது நிகழ்வு $P(n)$

n	1	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

i எறிதலின் பெறப்படும் எண் X_i என்க. இங்கு $i = 1, 2$

ஆகவே $P(X_1 + X_2 = 6) = P(X_1 = 1,\ X_2 = 5) + P(X_1 = 5,\ X_2 = 1)$

$+ P(X_1 = 2,\ X_2 = 4) + P(X_1 = 4,\ X_2 = 2)$

$+ P(X_1 = 3,\ X_2 = 3).$

$= 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ (15)

$= \frac{2}{9}.$ (5)

20

B என்ற தாயக்கட்டைகளை X_i இற்கு Y_i இனைப் பயன்படுத்துவோம்.

n	2	3	4	5
$P(n)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

அப்போது $(Y_1 + Y_2 = 6) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ **15**

$= \frac{1}{4}.$ **5**

20

Bayes தேற்றப்படி

$$P(A|\text{sum} = 6) = \frac{P(\text{sum} = 6|A)P(A)}{P(\text{sum} = 6|A).P(A) + P(\text{sum} = 6|B).P(B)}$$ **10**

5

$$= \frac{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{8}{17}.$$ **5**

10

30

$(b)\ \mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\ \ \mu_2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j}{m}.$ **5**

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_i}{m+n}$$ **5**

$$= \frac{n\mu_1 + m\mu_2}{m+n}.$$ **5**

15

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_3)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1 + \mu_1 - \mu_3)^2$$ **5**

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1 - d_1)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ (x_i - \mu_1)^2 + 2d_1(x_i - \mu_1) + {d_1}^2 \right\} \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2 - 2d_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1) + = \sum_{i=1}^{n} {d_1}^2 \quad (5)$$

$$= n\sigma_1^2 + n d_1^2 \left(\because \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1) = 0 \ , \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2}{n} \right)$$

(5) (5)

$$= n(\sigma_1^2 + d_1^2). \quad (5)$$

30

அவ்வாறே $\sum_{j=1}^{m} (y_j - \mu_3)^2 = m(\sigma_2^2 + d_2^2)$, இங்கு $d_2 = \mu_3 - \mu_2$. (5)

05

$$\sigma_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_3)^2 + \sum_{j=1}^{m} (y_i - \mu_3)^2}{m+n} \quad (5)$$

$$= \frac{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)}{m+n}$$

$$= \frac{(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2) + n(d_1^2 + md_2^2)}{m+n}. \quad (5)$$

10

முதல் 100 நாட்களுக்கு

$n = 100$, $\mu_1 = 2.3$, $\sigma_1 = 0.8$

அடுத்த 100 நாட்களுக்கு

$m = 100$, $\mu_2 = 1.7$, $\sigma_2 = 0.5$ (5)

$$\mu_3 = \frac{230 + 170}{200} = 2. \quad (5)$$

$d_1 = -0.3, \quad d_2 = 0.3$ ஆகும்.

$\sigma_3^2 = \frac{100}{200}[0.8^2 + 0.5^2 + (0.3)^2 + (0.3)^2]$ **5**

$= \frac{1}{2}[0.64 + 0.25 + 0.09 \times 2]$

$= \frac{1.07}{2} = 0.535$

$\sigma_3 = \sqrt{0.535}$. **5** **20**