සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි.
All Rights Reserved

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උ/පෙළ) විභාගය

13 ශ්‍රේණිය | **සංයුක්ත ගණිතය - I** | **පිළිතුරු පත්‍රය**

A කොටස

A කොටසේ ප්‍රශ්න 10 ට ලකුණු 25 බැගින් ද B කොටසේ ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ද හිමිවේ . $10 \times 25 = 250$
$5 \times 150 = 750$
1000

01. $x^8 + 2x^7 + 3x^3 + px + q = (x + 2)(x - 1) \varnothing (x)$

$x = 1$ විට $p = q = 6$

$x = -2$ විට $-2p + q = 24$

විසඳීමෙන් $p = (-10)$, $q = 4$

02. $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$

$\div x^2 \quad 3x^2 - 4x - 14 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$

$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$

$3(y^2 - 2) - 4y - 14 = 0$

$3y^2 - 4y - 20 = 0$

$(3y - 10)(y + 2) = 0$

$y = \frac{10}{3}$, $y = -2$

$y = \frac{10}{3}$ විට $x = \frac{1}{3}$, 3 $\quad y = -2$ විට $x = -1$, -1

03. පොදු මූල්‍ය α නම්, $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$ ——①

$a\alpha^2 + \alpha - c = 0$ ——②

① x α - ② $\quad a\alpha^2 - a\alpha^2 + ab - (a\alpha^2 + \alpha - c) = 0$

$\alpha = \frac{ab + c}{a^2 + 1}$ ——③

① + ② x α $\quad \alpha^2 - a\alpha^2 + b + a^2\alpha^2 + a\alpha - ac = 0$

$\alpha = \frac{ac - b}{a^2 + 1}$ ——④

③ හා ④ න් $\quad \frac{ac - b}{a^2 + b} = \left(\frac{ab + c}{a^2 + 1}\right)^2$

$(ac - b)(a^2 + 1) = (ab + c)^2$

04. $\frac{5 - x}{\lambda} = \frac{\lambda}{x + 7}$

$(5 - x)(x + 7) = \lambda^2$

$x^2 + 2x + 2 - 35 = 0$

මූල තාත්වික $\Delta \geq 0$ නම් විය යුතුය.

$\Delta = 2^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (\lambda^2 - 35) = 4\,(36 - \lambda^2)$ විය යුතුය.

$\Delta \geq 0$ වීමට $(36 - \lambda^2) \geq 0$ විය යුතුය.

$\lambda^2 - 36 \leq 0$ විය යුතුය.

$(\lambda - 6)\ (\lambda + 6) \leq 0$ විය යුතුය.

$-6 \leq \lambda \leq 6$

---

05. $\sum_{r=1}^{n} r \,.\, 2^{r-1} = 1 + (n - 1)\, 2^n$

$n = 1$ LHS = 1 , RHS = 1 $n = 1$ ට සත්‍ය වේ.

$n = p$ ට සත්‍ය යැයි උපකල්පනයෙන්,

$$\sum_{r=1}^{p} r \,.\, 2^{r-1} = 1 + (p - 1)\, 2^p$$

$n = p + 1$ ට සත්‍ය බව සාධනය කරමු.

$$\sum_{r=1}^{n} r \,.\, 2^{r-1} + (p + 1)\, 2^{p+1-1} = 1 + (9 - 1)2^p + (p+1) \times 2^p$$

$$= 1 + 2^p\,(p - 1 + p + 1) = 1 + 2^p \,.\, 2^p$$

$$= 1 + [(p + 1) - 1]2^{p+1}$$

$\therefore$ $n = p$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = p + 1$ ට ද සත්‍ය වේ.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන් සියළු ධන නිඛිල n සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

---

06. $y = \text{Sin}\,(m\ \text{Sin}^{-1}x)$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Cos}\,(m\ \text{Sin}^{-1}x) \times \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}$$

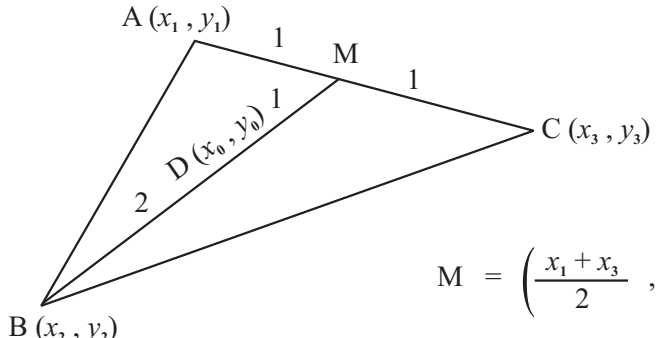
$$\sqrt{1 - x^2} \,.\, \frac{dy}{dx} = m\ \text{Cos}\ (m\ \text{Sin}^{-1}x)$$

නැවතත් අවකලනයෙන්, $\frac{d^2y}{dx^2}\ (1 - x^2) - x\ \frac{dy}{dx} = -m^2\ \text{Sin}\,(m\ \text{Sin}^{-1}x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ (1 - x^2) - x\ \frac{dy}{dx} = -m^2\ \text{Sin}\,(m\ \text{Sin}^{-1}x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ (1 - x^2) - x\ \frac{dy}{dx} + m^2y = 0$$

07.



$$M = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}\ ,\ \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$$

D කේන්ද්‍රය BM රේඛාව 2 : 1 අනුපාතයට බෙදන නිසා

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\ ,\ y_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\therefore D \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\ ,\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

---

08. $\underbrace{2\tan^{-1}x}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}y}_{\beta} = \frac{\pi}{2}$ නම් ,

$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\tan 2\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$

$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{y} \Rightarrow 1 - x^2 = 2xy \Rightarrow 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore (x+y)^2 = 1 + y^2$

---

09. $\frac{4a+b}{2a+b} = 7$

$a = -\frac{3b}{5}$

$\frac{5a+b}{5a-b} = \frac{-3b+b}{-3b-b} = \frac{-2b}{-4b} = \frac{1}{2}$

$\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} = \frac{b^2 - \frac{9b^2}{25}}{b^2 + \frac{9b^2}{25}} = \frac{8}{17}$

---

10. හමුදා භටයන් 8 දෙනා කණ්ඩායම් තුනකට වෙන් කළ හැකි ක්‍රම 4, 2, 2 , 3, 3, 2

4 2 2 ක්‍රමයට ${}^8C_4 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = \frac{8}{\lfloor 4 \rfloor \lfloor 4 \rfloor} \times \frac{4}{\lfloor 2 \rfloor \lfloor 2 \rfloor} \times \frac{1}{\lfloor 2 \rfloor} = 210$

3 3 2 ක්‍රමයට ${}^8C_3 \ {}^5C_3 \ {}^2C_2 = \frac{8}{\lfloor 5 \rfloor \lfloor 3 \rfloor} \times \frac{5}{\lfloor 2 \rfloor \lfloor 3 \rfloor} \times \frac{1}{\lfloor 2 \rfloor} = 280$

හමුදා භටයන් 3 ට වෙන් කළ හැකි ආකාර = 210 + 280 = 490

කණ්ඩායම් 3 ක් ගොඩනැගිලි 3 කට යෙදවිය හැකි ආකාර $= \lfloor 3 = 6$

හමුදා භටයන් ගොඩනැගිලි 3 මුර කිරීමට යෙදවිය හැකි ආකාර ගණන = 490 x 6 = 2940

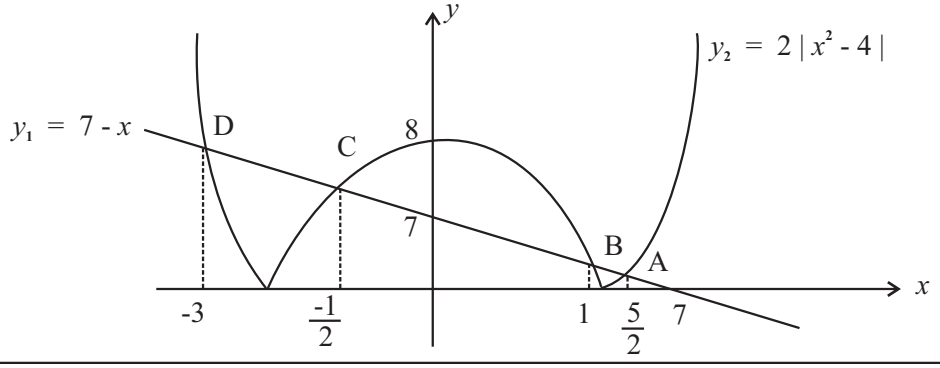
සංයුක්ත ගණිතය - I

B කොටස

---

11. $7 - x > 2\,|x^2 - 4|$

$y_1 = 7 - x$, $y_2 = 2\,|x^2 - 4|$ ප්‍රස්ථාර සලකමු.



$y_1 \geq y_2$ වන්නේ C සහ D , හා A සහ B අතර වේ.

A හා D සෙවීමට

$2(x^2 - 4) = 7 - x$

$(2x - 5)(x + 3) = 0$

$x = -3 , \frac{5}{2}$

D A

B හා C සෙවීමට

$-2(x^2 - 4) = 7 - x$

$(2x + 1)(x - 1) = 0$

$x = -\frac{1}{2} , +1$

C B

$\therefore$ අවශ්‍ය පරාසය $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ හා $-3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$U_r = r(r+1)$, $V_r = Ar^2 + Br + C$

$U_r = V_r - 3V_{r-1}$

$r(r+1) = Ar^2 + Br + C - 3[A(r-1)^2 + B(r-1) + C]$

$r^2 + r = -2Ar^2 + (6A - 2B)r - (-3A + 3B - 2C]$

$A = -\frac{1}{2}$, $1 = -2B + 6A$

$0 = -3A + 3B - 2C$

$B = -2$, $C = -\frac{9}{4}$

දී ඇති ශ්‍රේණියේ r වන පදය $\frac{r(r+1)}{3^r}$ නිසා,

$U_r = r(r+1)$

$U_r = V_r - 3V_{r-1}$ නිසා,

$\frac{U_r}{3^r} = \frac{V_r}{3^r} - \frac{V_{r-1}}{3^{r-1}}$

$r = 1$ විට $\frac{U_1}{3^1} = \frac{V_1}{3^1} - \frac{OV_0}{3^0}$

$r = 2$ විට $\frac{U_2}{2} = \frac{V_2}{3^2} - \frac{V_1}{3^1}$

$r = n - 1$ විට $\frac{Un-1}{n-1} = \frac{V_{n-1}}{3^{n-1}} - \frac{V_{n-2}}{3^{n-2}}$

$r = n$ විට $\frac{U_n}{3^n} = \frac{V_n}{3^n} - \frac{V_{n-1}}{3^{n-1}}$

$\sum_{r=1}^{n} \frac{U_r}{3^r} = \frac{V_n}{3^n} - V_0$

$= \frac{An^2 + Bn + C}{3^n} - C$

$= \frac{\frac{1}{2} - n^2 - 2n - \frac{9}{4}}{3^n} + \frac{9}{4}$

$= \frac{-2n^2 + 8n - 9}{4 \times 3^n} + \frac{9}{4}$ //

(12) (a) $y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + ...}}}$

$y = \sqrt{\tan x + y}$

$y^2 = \tan x + y$

$2y \cdot \frac{dy}{dx} = \text{Sec}^2 x + \frac{dy}{dx}$

$(2y - 1)\frac{dy}{dx} = \text{Sec}^2 x$ //

(b) $x^p y^q = (x + y)^{p+q}$

දෙපසම log ගැනීමෙන්,

$p \log x + q \log y = (p + q) \log (x + y)$

x විෂයෙන් දෙපසම අවකලනයෙන්,

$$p \cdot \frac{1}{x} + q \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = (p+q)\frac{1}{(x+y)}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

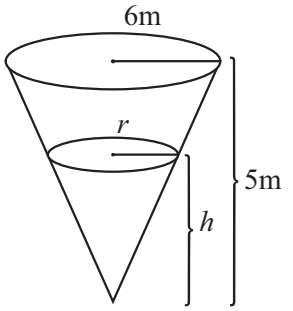
$$\frac{dy}{dx} \times \left(\frac{q}{y} - \frac{p+q}{x+y}\right) = \frac{p+q}{x+y} - \frac{p}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left[\frac{q(x+y) - y(p+q)}{y(x+y)}\right] = \frac{qx - py}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left(\frac{qx - py}{y}\right) = \frac{qx - py}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

(c)



කාලය t = t විට ටැංකිය තුළ ජලයේ ගැඹුර h ද, ජල පරිමාව V යැයි ද ගනිමු. සමරූපී ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්,

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{5}$$

$$r = \frac{6h}{5}$$

$$r = \frac{6h}{5}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{6h}{5}\right)^2 h = \frac{12}{25}\pi h^3$$

$$V = 12\pi h^3$$

එ විෂයෙන් අවකලනයෙන්, $\frac{dv}{dt} = \frac{12\pi}{25} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

$$36 = \frac{12\pi}{25} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi h^2}$$

ගැඹුර 3m වන විට ජල පෘෂ්ඨයට නඟින සීඝ්‍රතාව,

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=3} = \frac{25}{\pi \cdot 3^2} = \frac{25}{9\pi}\ mh^{-1}$$

(13) (a) l_1 තුළින් P හි ප්‍රතිබිම්බය R නම්,

$R = (3 + 2t , \lambda - t)$ මෙහි $t = -2\left(\frac{6 - \lambda + 2}{5}\right) = \frac{-2}{5}(8 - \lambda)$

$\therefore R \equiv \left(3 - \frac{4}{5}(8 - \lambda) , \lambda + \frac{2}{5}(8 - \lambda)\right)$ ——①

l_2 තුළින් Q හි ප්‍රතිබිම්බය S නම්,

$S = (-2 + t , 2 + 3t)$ මෙහි $t = -2\left(\frac{-2 + \mu + 6}{10}\right) = \frac{-1}{5}(4 + \mu)$

$\therefore S \equiv \left(-2 - \frac{1}{5}(4 - \mu) , 2 - \frac{3}{5}(4 - \mu)\right)$ ——②

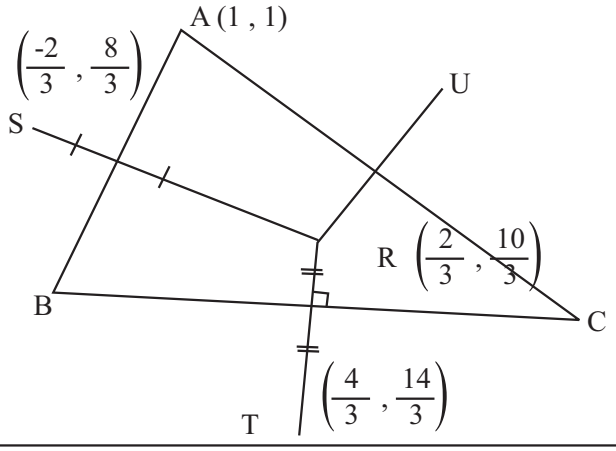
$R \equiv S$ බව දී ඇත. $\therefore$ ① හා ② න්,

$3 - \frac{4}{5}(8 - \lambda) = -2 - \frac{1}{5}(4 + \mu)$ ————③

$\lambda + \frac{2}{5}(8 - \lambda) = 2 - \frac{3}{5}(4 + \mu)$ ————④

③ හා ④ විසඳීමෙන් $\lambda = 3$, $\mu = -9$ ලැබේ.

(b)



RS අනුක්‍රමණය $= \frac{\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{\frac{-2}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ AB හි අනුක්‍රමණය $= -2$

AB හි සමීකරණය $= \frac{y - 1}{x - 1} = -2$

$2x + y - 3 = 0$ වේ.

RT සමීකරණය

$$\frac{y - \frac{10}{3}}{x - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{14}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}$$

$2x - y + 2 = 0$

RT අනුක්‍රමණය = 2 ද $BC \perp RT$ ද නිසා BC හි අනුක්‍රමණය = $-\frac{1}{2}$

අනුපාත ප්‍රමේයයන්, P = (1 , 4)

BC සමීකරණය $\frac{y-4}{x-1} = -\frac{1}{2}$

$x + 2y - 9 = 0$

C යනු RT මත B හි ප්‍රතිබිම්බයයි.

AB හා BC සමීකරණ විසඳීමෙන්, B ≡ (-1 , 5)

C යනු RT මත B හි ප්‍රතිබිම්බයයි.

C ≡ (-1 + 2t , 4 - 1)

මෙහි $t = -2\left(\frac{2(-1) - 5 + 2}{2^2 + (-1)^2}\right)$

$t = 2$

C ≡ (3 , 2)

---

(14) (a) $g_1 = 1,\ f_1 = 3,\ c_1 = -2,\ g_2 = 2,\ f_2 = -4,\ c_2 = \lambda$ නම්,

ප්‍රලම්භව ඡේදනය වන විට, $2(g_1g_2 + f_1f_2) = c_1 + c_2$

$2[1 \times 2 + 3 \times -4] = -2 + \lambda$

$\lambda = -18$

(b) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fg + c = 0$ අවශ්‍ය වෘත්තය නම්,

S කේන්ද්‍රය OX මත නිසා $f = 0$ ——①

$\therefore$ S කේන්ද්‍රය P නම් P ≡ (-g , O)

S හි අරය r_1 නම් $r_1 = \sqrt{g^2 - c}$

S_1 හි කේන්ද්‍රය Q නම්, Q ≡ (3 , 0)

S_1 හි අරය r_2 නම් $r_2 = \sqrt{3^2} = 3$

S වෘත්තය S_1 බාහිරව ස්පර්ශ කරන නිසා,

$PQ = r_1 + r_2$

$3 + g = \sqrt{g^2 - c} + 3$

$g = \sqrt{g^2 - c}$

$g^2 = g^2 - c$

$\therefore c = 0$ ——②

S හා S_1 ප්‍රලම්භ නිසා, $2(g_1 g_2 + f_1 f_2) = c_1 + c_2$ මඟින්,

$2[-2(-g) + 0(4)] = 8 + 0$

මින් g =2 බව ලැබේ.

$\therefore$ ① , ② හා ③ න් S හි සමීකරණය

$x^2 + y^2 + 4x = 0$

---

(15) $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$= I_1 + I_2$

$I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)dx$ $\quad x = -y$ ආදේශයෙන්,

$x = -a \rightarrow y = a$

$x = 0$ විට $\rightarrow y = a$

$dx = -dy$

$I_1 = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy)$

$I_1 = -\int_{-a}^{0} f(-y)\,dy$

$\int_{0}^{0} f(-y)\,dy$

$\int_{a}^{0} f(y)\,dy \quad [\therefore f(-x) = f(x)]$

$\int_{a}^{a} f(x)\,dx$ අනුකූල විචල්‍යයෙන් ස්වායත්ත නිසා,

$= I_2$

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}$

$f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(-x)} + \sqrt{1-(-x)} + 2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+(-x)} + \sqrt{1-(-x)} + 2}$

$\therefore f(-x) = f(x)$

$= \int_{-1}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}\,dx$

$= 2\int_{0}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}\,dx$

$x = \text{Sin } 4\,t$

$\dfrac{dy}{dx} = \text{Cos } 4\,t \times 4$

$dx = 4 \text{ Cos } 4t \,.\, dt$

$x \to 0 \quad t \to 0$

$x \to 1 \quad t \to \dfrac{\pi}{8}$

$1 + x = 1 + \text{Sin } 4t$

$= (\text{Sin}^2 2t + \text{Cos}^2 2t) + 2\text{Sin}^2 t \,.\, \text{Cos } 2t$

$= (\text{Sin } 2t + \text{Cos} 2t)^2$

එලෙසම $1 - x = 1 - \text{Sin } 4t$

$= (\text{Sin } 2t + \text{Cos} 2t)^2$

$t = 0$ සිට $\dfrac{\pi}{8}$ විට

$2t \to 0$ සිට $\dfrac{\pi}{4}$ දක්වා යයි.

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ විට $\text{Cos } \theta > \text{Sin } \theta$ වේ.

$\therefore \sqrt{1 - x} > 0$ බැවින් $\sqrt{\text{Sin } 2t - \text{Cos } 2t)^2} > 0$

$|\text{Sin } 2t - \text{Cos } 2t| = \text{Cos } 2t - \text{Sin } 2t$

$= 2\int_{0}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}\,dx$

$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \dfrac{4 \text{ Cos } 4t\,dt}{(\text{Sin } 2t + \text{Cos } 2t) + (\text{Cos } 2t - \text{Sin } 2t) + 2}$

$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \dfrac{4 \text{ Cos } 4t\,dt}{2 \text{ Cos } 2t + 2} \qquad = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \dfrac{4 \text{ Cos } 4t\,dt}{2(1 + \text{Cos } 2t)}$

$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \dfrac{2 \text{ Cos } 4t}{1 + \text{Cos } 2t} \,.\, dt \quad = \quad 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \dfrac{2 \text{ Cos } 4t}{2 \text{ Cos}^2 t}\,dt$

$\text{Cos } 4t = 2 \text{ Cos}^2 2t - 1 = 2[\text{Cos}^2 t - 1]^2 - 1$

$= 8 \text{ Cos}^4 t - t - 8 \text{ Cos}^2 t + 1$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{8\cos^2 t - 8\cos^2 t + 1}{\cos^2 t}\, dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 8\cos^2 t - 8 + \sec^2 t\, dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 4(1 + \cos 2t) - 8 + \sec^2 t\, dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 4\cos 2t + \sec^2 t - 4\, dt$$

$$= 2\left[\frac{4\sin 2t}{2} + \tan t - 4t\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$= 2\left[2\sin\frac{\pi}{4} - 2\sin 0 + \tan\frac{\pi}{8} - \tan 0 - 4\left(\frac{\pi}{8} - 0\right)\right]$$

$$= 2\left[2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 4\sqrt{2} - \pi - 2$$

(16) (a) $\sin 2x + 2\sin x - \cos x - 1 = 0$

$2\sin x \cdot \cos x + 2\sin x - \cos x - 1 = 0$

$2\sin x[\cos x + 1] - 1[\cos x + 1] = 0$

$(\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$1 + \cos x = 0$ හෝ $2\sin x - 1 = 0$

$\cos x = -1$

$\cos x = \cos \pi$

$x = 2n\pi \pm \pi \quad n \in Z$

$3\tan^2\theta - 2\sin\theta = 0$

$3 \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 2\sin\theta = 0$

$\sin\theta\left[\frac{3\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 2\right] = 0$

$\sin\theta = 0$ හෝ $\frac{3\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 2$

$\theta = n\pi + (-1)^n \cdot 0$

$\theta = n\pi : n \in Z$

$3\sin\theta = 2\cos^2\theta$

$2\sin\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$

$(2\sin^2\theta + 1)(\sin\theta + 2) = 0$

$2\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = m + (-1)^m \frac{\pi}{6} \quad , \quad m \in Z$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6} \quad m \in Z$

(b) $\frac{(a-b)\cos A + C}{a - b + \cos A} = \frac{a-b}{c}$

$(a-b)C\cos A + c^2 = (a-b)(a - b + c\cos A)$

$ac\cos A - bc\cos A + c^2 = a^2 - b^2 + ac\cos A + bc\cos A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

(c) $A + B + C = \pi$

$A + B = \pi - C$

$\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A - \tan B} = -\tan C$

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

(17) $x^2 + ax + b = 0$ හි මූල α , β වේ.

$\alpha + \beta = -a$

$\alpha\beta = a$ ———①

$x^2 + cx + d = 0$ හි මූල α^2 , β වේ.

$\alpha^2 + \beta = -c$

$\alpha^2\beta = d$ ———②

①/② $\dfrac{\beta^2}{\beta} = \dfrac{b^2}{d}$

$\beta = \dfrac{b^2}{d}$

β , $x^2 + ax + b = 0$ හි මූලයක් බැවින්,

$$\left(\frac{b^2}{d}\right)^2 + a\left(\frac{b^2}{d}\right) + b = 0$$

$b^4 + ab^2d + bd^2 = 0$ ———③

$\div b$ $\quad b^3 + abd + d^2 = 0$

$x^2 + cx + d = 0$ මූලයක් බැවින්,

$$\left(\frac{b^2}{d}\right)^2 + c\left(\frac{b^2}{d}\right) + d = 0$$

$b^4 + cb^2d + d^3 = 0$ ———④

③-④ $\quad ab^2d - cb^2d + bd - d^3 = 0$

$\div d$ $\quad d^2 - bd + d^2(c - a) = 0$

$b^2(a - c) = d(d - b)$

$$b^2 = d\,\frac{(d - b)}{(a - c)}$$

③ ට ආදේශයෙන්,

$$\left\{\frac{d(d - b)}{(a - c)}\right\}^2 + ad\left\{\frac{d(d - b)}{(a - c)}\right\} + bd^2 = 0$$

$d^2(b - d)^2 + ad^2(a - c)(d - b) + bd^2(a - c)^2 = 0$

$\div d^2$

$b(a - c)^2 + a(a - c)(d - b) + (b - d)^2 = 0$

සංයුක්ත ගණිතය - II

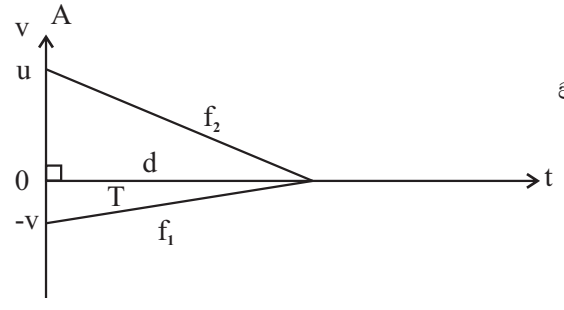
A කොටස

A කොටසේ ප්‍රශ්න 10 ට ලකුණු 25 බැගින් ද B කොටසේ ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ද හිමිවේ . $10 \times 25 = 250$

$5 \times 150 = 750$

1000

01.



$$T = \frac{u}{f_2} = \frac{v}{f_1}$$

වර්ගඵලය $= d = \dfrac{1}{2} \times T \times (u + v)$

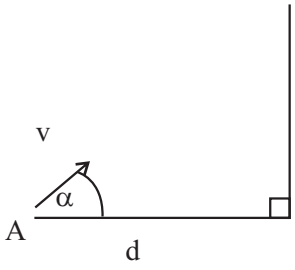
$2d = Tu + Tv$

$2d = \dfrac{u}{f_2} \cdot u + \dfrac{v}{f_1} v$

$2d = \dfrac{f_1u^2 + f_2v^2}{f_1f_2}$

$\therefore v^2f_2 + u^2f_1 = 2f_1f_2d$

02.



$A \to B$,

$\to S = u + \frac{1}{2} at^2$

$d = v \cos \alpha \, . \, t$

$A \to B \uparrow S = ut + \frac{1}{2} gt^2$

$d = v \sin \alpha \times t - \frac{1}{2} gt^2$

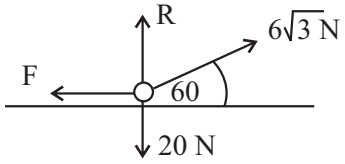
$d = v \sin \alpha \left(\frac{d}{v \cos \alpha}\right) - \frac{g}{2} \left(\frac{d}{v \cos \alpha}\right)^2$

$1 = \tan \alpha - \frac{gd}{2v^2} \sec^2 \alpha$

$\frac{gd}{2v^2} (\tan^2 \alpha + 1) = \tan \alpha - 1$

$v^2 = \frac{gd (\tan^2 \alpha + 1)}{2 (\tan \alpha - 1)}$

03.



ලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R ද, ඝර්ෂණ බලය T ද නම්,

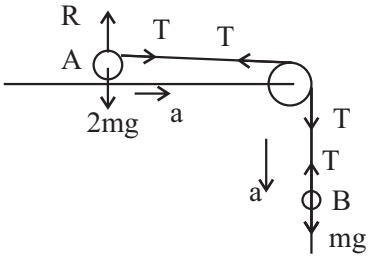
$\leftarrow F - 6\sqrt{3} \cos 60 = 0$

$F = 3\sqrt{3}$ N

$\uparrow R + 6\sqrt{3} \sin 60 - 20 = 0$

$R = 11$ N

04.



තන්තුවල ආතතිය T ද, පොදු ත්වරණය a ද නම්,

$F = ma$

A ට $\rightarrow T = 2ma$

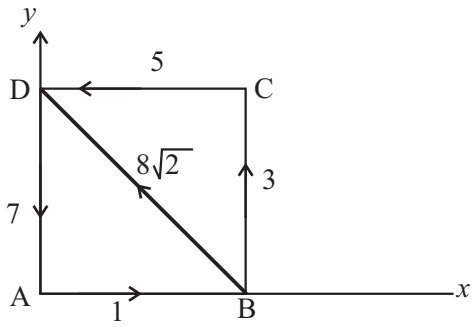
B ට $\downarrow mg - T = ma$

$T = \frac{2mg}{3}$

$\therefore$ පොදු ත්වරණය $\frac{g}{3}$ ms^{-2} , ආතතිය $\frac{2mg}{3}$

කප්පිය මත බලය $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ mg N

05.



$\rightarrow x = 1 - 5 - 8\sqrt{2} \cos 45 = -12$

$\uparrow y = 3 - 7 + 8\sqrt{2} \sin 45 = 4$

$\therefore$ සම්ප්‍රයුක්තය $= \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$ N

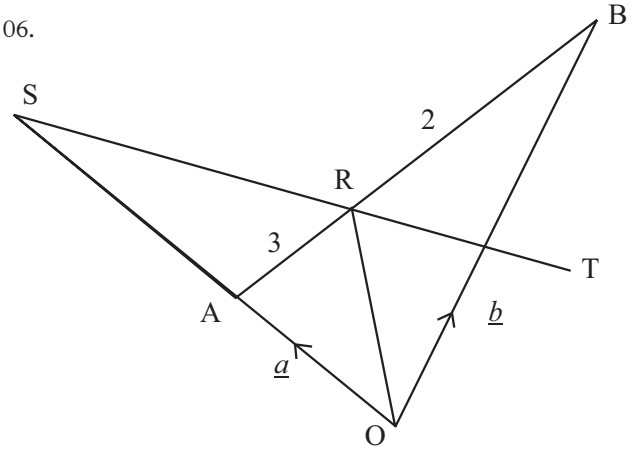
A ඔස්සේ $G = 3 \times a + 5 \times a + 8\sqrt{2} \times a \cos 45 = 16a$

P (x , y) සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව මත ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

P ඔස්සේ $-12y - 4x + 16a = 0$

$\therefore$ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $x + 3y - 4a = 0$

06.



AR : RB = 3 : 2

$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5}$

S, R, T ඒකරේඛීය නිසා, $\overrightarrow{SR} = \lambda \, . \, \overrightarrow{ST}$

$\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = \lambda (\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OS})$

$\frac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5} - 3\underline{a} = \lambda \frac{(9\underline{b} - 24\underline{a})}{5} - \lambda \, . \, 3\underline{a}$

$2\underline{a} + 3\underline{b} - 15\underline{a} = 9\lambda\underline{b} - 24\lambda\underline{a} - 15\lambda\underline{a}$

$3\underline{b} - 13\underline{a} = 9\lambda\underline{b} - 39\lambda\underline{a}$

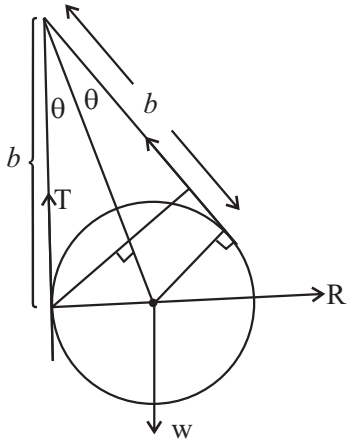
$\underline{b}$ වල $3 = 9\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$\underline{a}$ වල $-13 = -39\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$$SR = \frac{1}{3} ST \Rightarrow \frac{SR}{ST} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{SR}{ST - SR} = \frac{1}{3-1} \Rightarrow \frac{SR}{RT} = \frac{1}{2}$$

07.



B ↻ Wa = T . b . Sin 2θ

$$T = \frac{aw}{b} \cdot \frac{1 + \tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{aw}{b} \left(\frac{1 + \frac{a^2}{b^2}}{2\frac{a}{b}} \right)$$

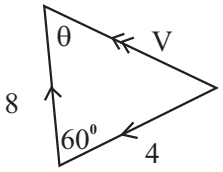
$$= \frac{w}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} \right)$$

08. සයිකල්කරුගේ ප්‍රවේගය $V_{C,E} = \uparrow 8\ ms^{-1}$

සුළඟේ ප්‍රවේගය $V_{wc} = 4\ ms^{-1}$ ↙60°

$V_{(W,E)} = V_{(W,C)} + V_{(C,E)}$

V ↖θ = ↑8 + 4 ↙60°



$\leftarrow V \sin\theta = 4 \sin 60 = 2\sqrt{3}$

$\uparrow V \cos\theta = 8 - 4 \times \frac{1}{2} = 6$

$V = \sqrt{12 + 36} = 4\sqrt{3}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{12\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^0$

සුළඟ $4\sqrt{3}\ ms^{-1}$ වේගයෙන් දකුණින් 30^0 ක් නැගෙනහිර දිශාවට වේ.

09. අවසාන ප්‍රවේගය $V = u + at$

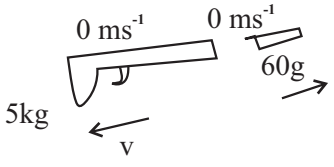
$4 + 2 \times 5 = 14\ ms^{-1}$

ආරම්භයේ දී චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2} \times 2 \times 4^2 = 16J$

අවසානයේ දී චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2} \times 2 \times 14^2 = 196J$

චාලක ශක්ති වැඩිවීම $= 196 - 16 = 180J$

10.



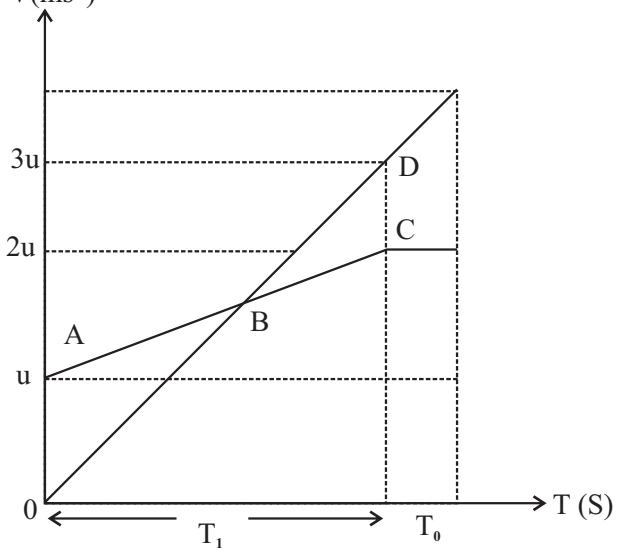
රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයට අනුව,

$500 \times 0.06 + 5 \times (-V) = 0$

$V = 6\ ms^{-1}$

B කොටස

(01) $V(ms^{-1})$



දුම්රිය සඳහා,

$$\frac{2u - u}{T_1} = 3f$$

$$T_1 = \frac{u}{3f}$$

මෝටර් රථය,

$$\frac{4u - 0}{T_2} = 9f$$

$$T_2 = \frac{4u}{9f}$$

$$T_2 = \frac{4}{3} T_1$$

$\therefore T_2 > T_1$

$\therefore$ ප්‍රථමයෙන් දුම්රිය උපරිම ප්‍රවේගයට ළඟා වේ.

මෝටර් රථයට, $\frac{V_1 - 0}{T} = 9f$

$$V_1 = 9f \times \frac{u}{3f} = 3u$$

$CD = 3u \equiv 2u = u = OA$

$\therefore OAB \Delta \; BCD \Delta$

$\therefore$ දුම්රිය උපරිම ප්‍රවේගය ලබාගන්නා තෙක් විස්ථාපනයෙන් සමාන වේ. ආරම්භක පිහිටුමට සමාන පිහිටුමක් දුම්රිය ප්‍රවේගය ලබාගන්නා විට පවතී.

$$\frac{4u - 3u}{T_0} = 9f$$

$$T_0 = \frac{u}{9f}$$

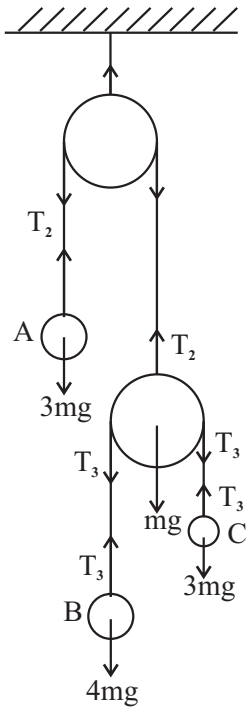
$\therefore T_0$ කාලය තුළ ගමන් කළ දුර = මෝටර් රථයේ දිග

$$= \frac{1}{2} (2u + u) \times T_0$$

$$9l = \frac{3u}{2} \times \frac{u}{9f}$$

$$l = \frac{u^2}{54f}$$

(02)



$a_{A, E} = \downarrow F$

$a_{D, E} = \uparrow F$

$a_{B, D} = \downarrow f$

$a_{C, D} = \uparrow f$

$a_{B, E} = \downarrow (f - F)$

$a_{C, E} = \uparrow (f + F)$

F = ma

A ට $\uparrow$ $8mg - T_2 = 8\ mF$ ———— ①

B ට $T_2 - 2T_3 - mg = mF$ ———— ②

C ට $4mg - T_3 = 4\ m\ (f - F)$ ———— ③

D ට $T_3 - 3mg - = 3\ m\ (f + F)$ —— ④

(1) 4 x (4) - 3 x (3)

$7\ T_3 - 24\ mg = 24\ mF$ ———— ⑤

2 x ⑤ + 7 x ② + 7 x ①

$-48\ mg - 7mg + 56mg = 48mF + 7mF + 56mF$

$mg = 111mF$

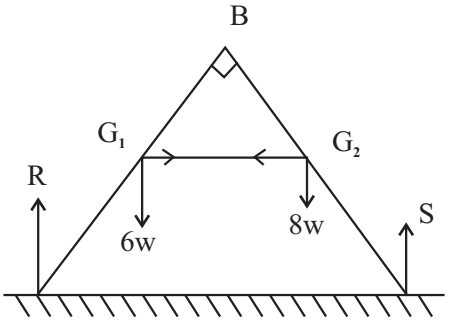
$$F = \frac{g}{111}$$

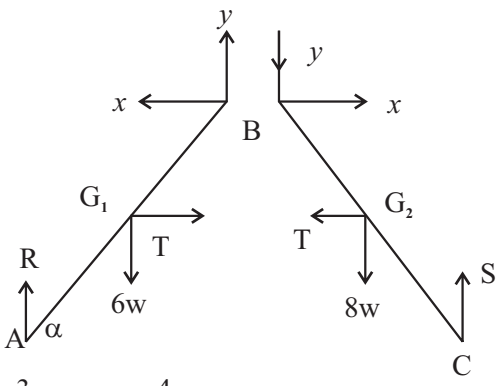
(ii) ⑤ න් $7\ T_3 = 24\ m\ (g + F)$

$$= 24\ m\ (g + \frac{g}{111})$$

$$7\ T_3 = \frac{24 \times 112\ mg}{111} = \frac{384\ mg}{111}$$

(03)





$AB = 6a$, $BC = 8a$, $BG = 3a$, $BG_2 = 4a$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$G_1G_2 = 5a$, $A\hat{B}C = 90^0$, $B\hat{A}C = \alpha$ නම්

පද්ධතියේ සමතුලිතතාවයට

$A\circlearrowleft$ S

$(6a\cos\alpha + 8a\sin\alpha) - 6w \cdot 3a\cos\alpha - 8w(6a\cos\alpha + 4a\sin\alpha) = 0$

$50S = 54w + 272w = 326w$

$S = \frac{326w}{50} = \frac{163w}{25}$

BC හි සමතුලිතතාවයට,

$B\circlearrowleft$ $8 - 4a\sin\alpha = T \times 4a\cos\alpha$

$4T \times \frac{3}{5} = 4 \times \frac{4}{5} \times \frac{163}{25} w - 8w \times 4 \times \frac{4}{5}$

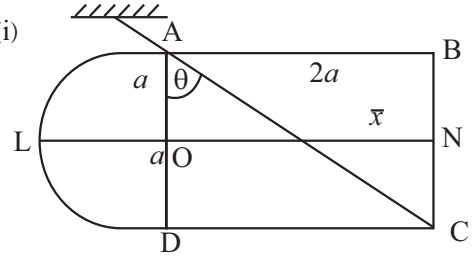
$3T = \frac{148w}{25} \Rightarrow T = \frac{148w}{75}$

$\overrightarrow{X} - T = 0 \quad X = T = \frac{148w}{75}$

$\uparrow S - 8w - y = 0$

$y = S - 8w = \frac{163w}{25} - 8 = \frac{-37w}{25}$

(04) (i)



සමමිතිය අනුව ගු.කේ. LON මතුවේ.

වස්තුව	ස්කන්ධය	ගුරුත්ව දුර (N සිට)
ABCD	$4a^2P$	a
ALD	$\frac{\pi a^2}{2}P$	$\left(\frac{4a}{3\pi} + 2a\right)$
සංයුක්ත	$\frac{a^2}{2}P(8+\pi)$	$\bar{x}$

N වටා

සංයුක්ත වස්තුවේ ඝූර්ණය = කොටස්වල පූර්ණ ඵෙක්‍යය

$\frac{a^2}{2}P(8+\pi)\,\bar{x} = 4a^2\,pa + \frac{\pi a^2}{2}\,p\left(\frac{4a}{3\pi} + 2a\right)$

$(8+\pi)\,\bar{x} = 8a + \pi\left(\frac{4a + 6\pi a}{3\pi}\right)$

$\bar{x} = \frac{a}{3}\,\frac{24 + 4 + 6\pi}{8 + \pi}$

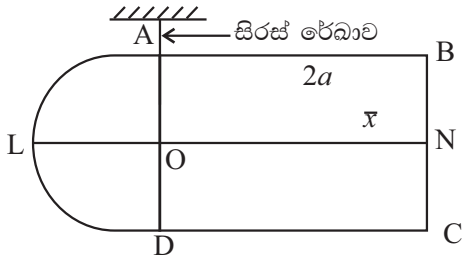
$\bar{x} = \frac{2a(14 + 3\pi)}{3(8 + \pi)}$

(ii) AD සිරසට ආනත කෝණය θ නම්,

$\tan\theta = \frac{2a - \bar{x}}{a} = 2 - \frac{2(14 + 3\pi)}{3(8 + \pi)}$

$= \frac{20}{3(8 + \pi)} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{20}{3(8 + \pi)}$

(iii)



$\frac{a^2}{2}$ p $(8 + \pi) = m$

සංයුක්තයේ සහ P හි ගු.කේ. O මත විට AD සිරස් වේ.

වස්තුව	ස්කන්ධය	ගු.කේ. O සිට දුර
සංයුක්ත	m	$2a - \frac{2a(14 + 3\pi)}{3(8 + \pi)} = \frac{20a}{3(8 + \pi)}$
P	$\frac{5m}{3}$	$-x$
නව වස්තුව	$m + \frac{5m}{3}$	*0*

O වටා

නව වස්තුවේ සුර්ණය = කොටස්වල සුර්ණවල වීජ ඓක්‍යය

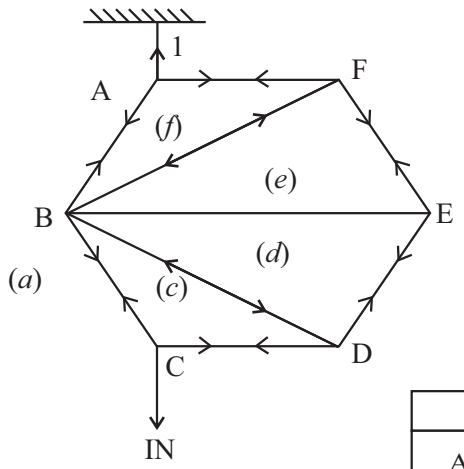
$$\left(m + \frac{5m}{3}\right) O = \frac{5m}{3}(-x) + m \cdot \frac{20a}{3(8 + \pi)}$$

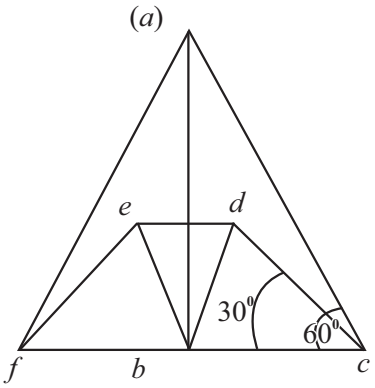
$$\frac{5x}{3} = \frac{20a}{3(8 + \pi)} \Rightarrow x = \frac{20}{5(8 + \pi)}$$

AD සිට P අංශුවට දුර $= \frac{4a}{8 + \pi}$

$x > O$ නිසා p , අර්ධ වෘත්ත ආස්තරය මත වේ.

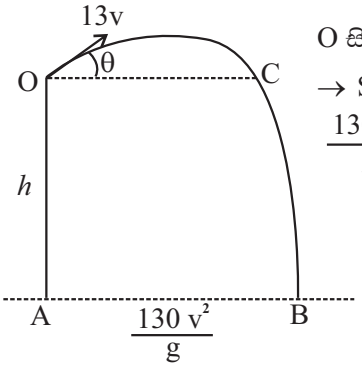
(05) BE වටා පද්ධතිය සමමිතික වේ.





දණ්ඩ	ආනතිය	තෙරපුම
AB = BC	$ac = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	-
AF = CD	$bc - \frac{\sqrt{3}}{3}$	-
ED = EF	$bd - \frac{\sqrt{3}}{6}$	-
BD = BF	-	$cd - \frac{1}{2}$
BE	-	$ed - \frac{\sqrt{3}}{6}$

(06) (i)



O සිට P ට කාලය t නම්,

$\rightarrow$ S = ut යෙදීමෙන්,

$$\frac{130\,v^2}{g} = 13v \cos\theta \cdot t$$

$$= 13v \frac{5t}{13}$$

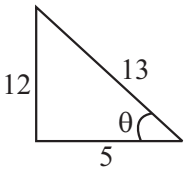
$$t = \frac{26v}{g}$$

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$-h = 13v \text{ Sin } \theta \text{ . } t - \frac{1}{2}gt^2$

$= \frac{26v}{g} - [12v - \frac{1}{2} g \text{ x } \frac{26v}{g}]$

$= \frac{-26v^2}{g} \qquad \therefore h = \frac{26v^2}{g}$



$\text{Sin } \theta = \frac{12}{13}$

$\text{Cos } \theta = \frac{5}{13}$

(ii) O සිට C ට කාලය T නම්,

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

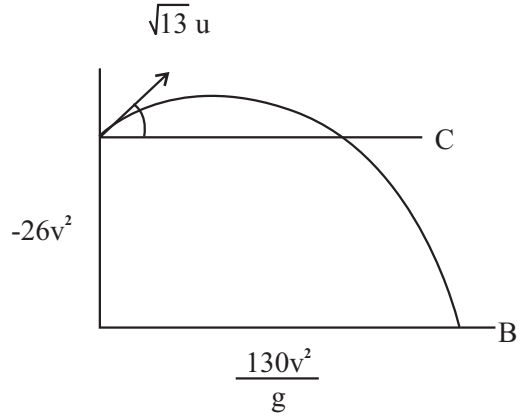
$O = 13v \text{ Sin } \theta \text{ . } t - \frac{1}{2} gt^2$

$t = \frac{26v}{g} \text{ Sin } \theta = \frac{26}{g} \text{ x } \frac{12}{13} = \frac{24v}{g}$

$\overrightarrow{S} = ut$

$OC = 13v \text{ Cos } \theta \text{ . } t$

$= 13v \text{ x } \frac{5}{13} \text{ x } \frac{24v}{g} = \frac{120v^2}{g}$



(iii) O - B කාලය T නම්, $\overrightarrow{S} = ut$

$\frac{130v^2}{g} = 5\sqrt{13} \text{ u Cos } \alpha \text{ t}$

$t = \frac{130v^2}{5\sqrt{13} \text{ ug Cos } \alpha}$

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2} at^2$

$\frac{-26v^2}{g} = 5\sqrt{13} \text{ u Sin } \alpha \text{ . } \frac{130v^2}{5\sqrt{13} \text{ ug Cos } \alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{130v^2}{5\sqrt{13} \text{ ug Cos } \alpha} \right)^2$

$\frac{-26v^2}{g} = \frac{130v^2}{g} \tan \alpha - \frac{g}{2} \text{ x } \frac{130v^2 \text{ x } 130v^2}{25 \text{ x } 13u^2g^2} (1 + \tan^2 \alpha)$

$-1 = 5 \tan \alpha - \frac{v^2}{u^2} (1 + \tan^2 \alpha)$

$\alpha = 45$ විට, $-1 = 5 - \frac{v^2}{u^2} (1 + 1)$

$u^2 = \frac{v^2}{3} \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{v}{\sqrt{3}}$

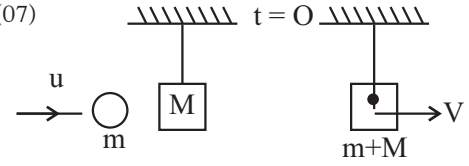
u හි අගය ① ට ආදේශයෙන්, $-1 = 5 \tan \alpha - 3 \ (1 + \tan^2 \alpha)$

$3 \tan^2 \alpha - 5 \tan^2 \alpha + 2 = 0$

$(\tan \alpha - 1) \ (3 \tan \alpha - 2) = 0$

$\tan \alpha = 1$ හෝ $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right)$

(07)



$I = \Delta \text{ (mv)}$ යෙදීමෙන්

$O = (m + M) V - mu - M \text{ x } O = 0$

$V = \frac{mu}{m + M}$

ලී කුට්ටිය V වලින් ආරම්භ වී වෘත්තයක චලිත වේ.

O තුළින් තිරස් රේඛාවේ විභව ශූන්‍ය වේ.

$\frac{1}{2} (m+M) V_1^2 - (m+M)g \text{ a Cos } \theta = k$

$\theta = 0$ විට $V_1 = V$ බව ආදේශයෙන් $\frac{1}{2} (m+M) V^2 - (m+M)ag = k$

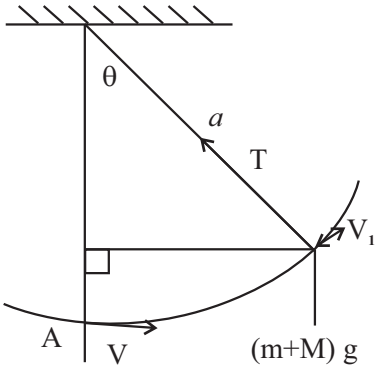
$\frac{1}{2}$ (m+M) V^2 - (m+M)ag . Cos θ = $\frac{1}{2}$ (m+M) V^2 - (m+M)ag = K

$V_1^2 = V^2 + 2ag\,(\cos\theta - 1)$

අර්ධ වෘත්තයක චලිත වේ නම්, $\theta = \frac{\pi}{2}$ විට $V_1 = 0$

$O = V^2 + 2ag\,(-1) \Rightarrow V = \sqrt{2ag}$

$\frac{mu}{m+M} = \sqrt{2ag} \Rightarrow u = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2ag}$



↖ F = ma යෙදීමෙන්,

$T - (m+M)\,g\cos\theta = (m+M)\frac{V_1^2}{a}$

$T = (m+M)\,g\cos\theta + \frac{(m+M)}{a}\,[V^2 + 2ag\,(\cos\theta - 1)]$

$\theta = 60^0$ විට, $T = (m+M)\,g_1^2 + \frac{(m+M)}{a} + \left[V^2 + 2ag\,(\frac{1}{2} - 1)\right]$

$= \frac{(m+M)}{a}\left[\frac{ag}{2} + \frac{m^2u^2}{(m+M)^2} - ag\right]$

$= \frac{(m+M)}{a}\left[\frac{-ag}{2} + \frac{(m+M^2)\times 2ag}{(m+M)^2}\right]$

$= \left(\frac{(m+M)}{a}\right)\left[\frac{3ag}{2}\right] = \frac{3(m+M)g}{2}$