අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2019

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

(නව නිර්දේශය)

ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

A කොටස :	10 × 25	=	250
B කොටස :	05 × 150	=	750

එකතුව	=	1000 / 10
I පත්‍රය අවසාන ලකුණ	=	100

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න. ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) ....
....
.... √ △ $\frac{4}{5}$

(ii) ....
....
.... √ △ $\frac{3}{5}$

(iii) ....
....
.... √ △ $\frac{3}{5}$

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = □ $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, L.H.S. $= 2 \times 1 - 1 = 1$ හා R.H.S. $= 1^2 = 1$. (5)

$\therefore$ ප්‍රතිඵලය $n = 1$ සඳහා සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන ප්‍රතිඵලය $n = p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරන්න.

එනම් $\sum_{r=1}^{p}(2r-1) = p^2$. (5)

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1}(2r-1) = \sum_{r=1}^{p}(2r-1) + \big(2(p+1)-1\big)$ (5)

$= p^2 + (2p+1)$

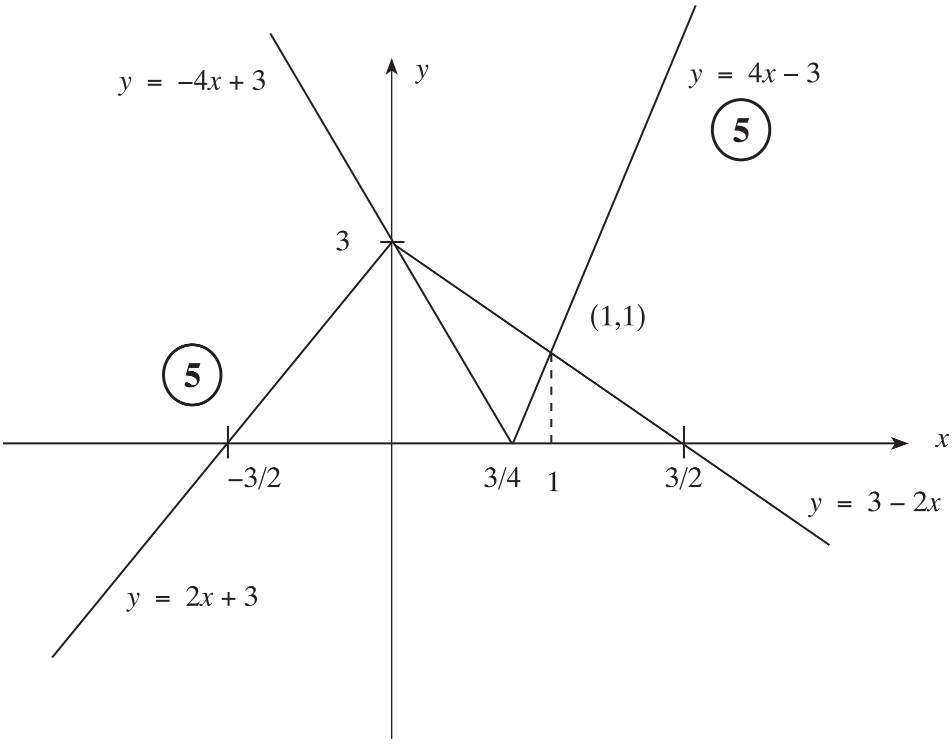
$= (p+1)^2$. (5)

ඒ නයින්, $n = p$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = p+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත. එම නිසා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලුම $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

25

2. එක ම රූප සටහනක $y=|4x-3|$ හා $y=3-2|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|2x-3|+|x|<3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



මෙම ප්‍රස්තාරයෙන්හි ඡේදන ලක්ෂවලදී

$$4x-3=3-2x \Rightarrow x=1 \quad (5)$$

$$-4x+3=3+2x \Rightarrow x=0$$

ප්‍රස්තාර මගින්,

$|4x-3| < 3-2|x| \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$ වේ.

$\therefore \ |4x-3| + |2x| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$

x යන්න $\dfrac{x}{2}$, මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්,

$$|2x-3| + |x| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 2. \quad (5)$$

$\therefore \ |2x-3| + |x| < 3$ අසමානතාවය තෘප්ත කරන සියලු x අගයන්ගේ කුලකය

$\{x : 0 < x < 2\}$ වේ. (5)

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5).

x හි අගයන් සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්

$|2x-3| + |x| < 3$

(i) අවස්ථාව $x \le 0$:

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 - x < 3$

$\Leftrightarrow 3x > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොපවතී.

(ii) අවස්ථාව $0 < x \le \frac{3}{2}$

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow -2x + 3 + x < 3$

$\Leftrightarrow x > 0$

එනයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x \le \frac{3}{2}$ වේ.

(iii) අවස්ථාව $x > \frac{3}{2}$

එවිට $|2x-3| + |x| < 3 \Leftrightarrow 2x - 3 + x < 3$

$\Leftrightarrow 3x < 6$

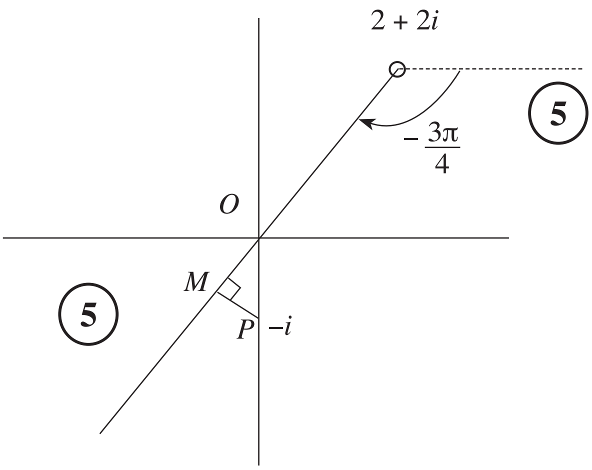
$\Leftrightarrow x < 2$

එනයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $\frac{3}{2} < x < 2$ වේ.

අවස්ථා 3 ම නිවැරදි විසඳුම් සහිතව	(10)
ඕනෑම අවස්ථා 2 ක් නිවැරදි විසඳුම් සහිතව	(5)

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේදී අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගයන් $0 < x < 2$ වේ. (5) **25**

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\text{Arg}(z-2-2i) = -\dfrac{3\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\text{Arg}(z-2-2i) = -\dfrac{3\pi}{4}$ වන පරිදි $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය සොයන්න.



$|i\bar{z}+1| = |i(\bar{z}-i)| = |\bar{z}-i| = |\overline{z+i}|$

$= |z+i|$

$= |z-(-i)|$ (5)

ඒ නයින්, $|i\bar{z}+1|$ හි අවම අගය PM වේ. (5)

දැන්, $PM = 1 \,.\, \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (5)

25

4. $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^6 හි සංගුණකය 35 බව පෙන්වන්න.

ඉහත ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x වලින් ස්වායත්ත පදයක් **නොපවතින** බවත් පෙන්වන්න.

$$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^7 = \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r\,(x^3)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r}$$ (5)

$$= \sum_{r=0}^{7} {}^7C_r\, x^{5r-14}$$

x^6 : $5r - 14 = 6 \Leftrightarrow r = 4.$ (5)

$\therefore$ x^6 හි සංගුණකය $= {}^7C_4 = 35$ (5)

ඉහත ප්‍රසාරණයට x, වලින් ස්වායත්ත පදයක් තිබීම සඳහා $5r - 14 = 0$ විය යුතුය. (5)

$r \in \mathbb{Z}^+$ බැවින් මෙය සිදුවිය නොහැක. (5)

25

5. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sin(\pi(x-3))} = \dfrac{1}{2\pi}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}\ -1}{\sin(\pi(x-3))} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-2}\ -1}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \frac{(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x-3\to 0} \frac{x-3}{\sin(\pi(x-3))} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{1}{(\sqrt{x-2}+1)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x-3\to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi(x-3))}{\pi(x-3)}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad (5)$$

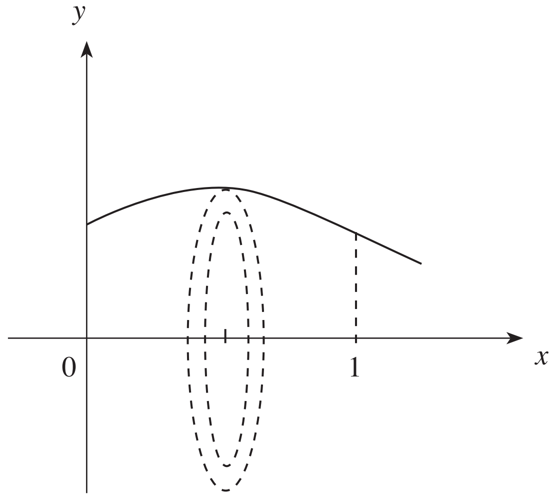
$$= 1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}$$

(5)

$$= \frac{1}{2\pi} \quad (5)$$

25

6. $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$, $x = 0,\ x = 1$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x - අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලබයි. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{\pi}{4}(\pi + \ln 4)$ බව පෙන්වන්න.



ජනනය වූ පරිමාව $= \displaystyle\int_0^1 \pi \left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\right)^2 dx$ **(5)**

$= \pi \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx \right)$ **(5)**

$= \pi \left(\dfrac{1}{2} \ln (x^2+1) \Big|_0^1 + \tan^{-1} x \Big|_0^1 \right)$ **(5)** + **(5)**

$= \pi \left(\dfrac{1}{2} \ln 2 + \dfrac{\pi}{4} \right)$

$= \dfrac{\pi}{4} \left(\ln 4 + \pi \right)$ **(5)**

25

7. C යනු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = at^2$ සහ $y = 2at$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන පරාවලය යැයි ගනිමු; මෙහි $a \neq 0$ වේ. C පරාවලයට $(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $y + tx = 2at + at^3$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
C පරාවලය මත $P \equiv (4a, 4a)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බ රේඛාවට එම පරාවලය නැවත $Q \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂ්‍යයක දී හමු වේ. $T = -3$ බව පෙන්වන්න.

$x = at^2$, $y = 2at$

$\frac{dx}{dt} = 2at$, $\frac{dy}{dt} = 2a$

$t \neq 0$ සඳහා $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2a \cdot \frac{1}{2at} = \frac{1}{t}$ (5)

$\therefore$ අභිලම්බ රේඛාවේ බෑවුම $= -t$

$(at^2, 2at)$ හිදී අභිලම්බයේ සමීකරණය

$y - 2at = -t\,(x - at^2)$ වේ.

$y + tx = 2at + at^3$ (5) (මෙය $t = 0$ සඳහා වලංගු වේ.)

$P \equiv (4a, 4a)$ on $C \Rightarrow t = 2$.

P හිදී අභිලම්බ රේඛාව : $y + 2x = 4a + 8a = 12a$ (5)

එය C හිදී $(aT^2, 2aT)$ හමු වන බැවින්

$2aT + 2aT^2 = 12a.$ (5)

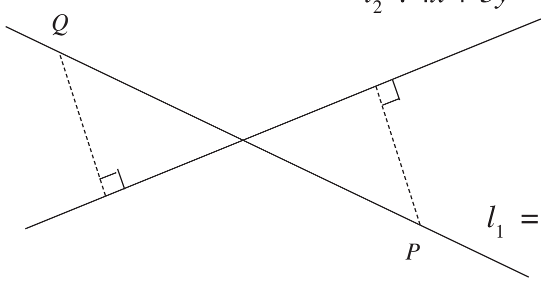
$\Leftrightarrow T^2 + T - 6 = 0 \Leftrightarrow (T-2)(T+3) = 0$

$\Leftrightarrow T = 2$ හෝ $T = -3$

$\therefore T = -3$ (5)

25

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $x + y = 4$ හා $4x + 3y = 10$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙක l_1 රේඛාව මත පිහිටා ඇත්තේ මෙම එක් එක් ලක්ෂ්‍යයේ සිට l_2 රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක 1 ක් වන පරිදි ය. P හි හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



l_1 මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක්

$(t, 4 - t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැක; මෙහි $t \in \mathbb{R}$. **(5)**

$P \equiv (t_1, 4 - t_1)$ යැයි ගනිමු.

P සිට l_2 ට ලම්බ දුර $= \dfrac{\left|4t_1 + 3(4 - t_1) - 10\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$

(5)

$\therefore \ \left|t_1 + 2\right| = 5$

$\therefore \ t_1 = -7$ හෝ $t_1 = 3$ **(5)**

P හා Q හි ඛණ්ඩාංක

$(-7, 11)$ හා $(3, 1)$ වේ. **(5)** + **(5)**

25

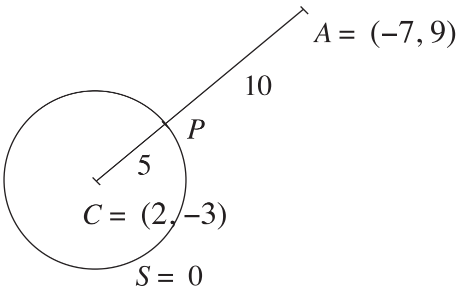
9. $A \equiv (-7, 9)$ ලක්ෂ්‍යය $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න. $S = 0$ වෘත්තය මත වූ, A ලක්ෂ්‍යයට ආසන්නතම ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S = 0$ හි කේන්ද්‍රය C කේන්ද්‍රය $(2, -3)$ වේ. (5)

$S = 0$ හි R අගය $\sqrt{4+9+12} = \sqrt{25} =$ වේ. (5)

$CA^2 = 9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow CA = 15 > R = 5.$ (5)

$\therefore$ A ලක්ෂ්‍යය දී ඇති වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටයි.



$S = 0$ වෘත්තයට ආසන්නතම A ලක්ෂ්‍යය

CA ට $S = 0$ හමුවන P ලක්ෂ්‍ය වේ.

$CP : PA = 5 : 10$

$= 1 : 2$ (5)

$$\therefore \quad P \equiv \left(\frac{2 \times 2 + 1(-7)}{3}, \quad \frac{2(-3) + 1 \times 9}{3} \right)$$

එනම් $P \equiv (-1, 1)$ (5)

25

10. $\theta \neq (2n+1)\pi$ සඳහා $t = \tan\frac{\theta}{2}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ. $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ බව පෙන්වන්න.
$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} \quad (5)$$; $\theta \neq (2n+1)\pi$ සඳහා

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු. එවිට $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (5)

$$\Rightarrow \sqrt{3}(1+t^2) = 2(1-t^2)$$

$$(2+\sqrt{3})t^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \quad (5)$$

$$= (2-\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3} \quad (5) \qquad \left(\because \tan\frac{\pi}{12} > 0\right)$$

25

11. (*a*) $p \in \mathbb{R}$ හා $0 < p \leq 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 + 2x + p = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.
α හා β යනු මෙම සමීකරණයෙහි මූල යැයි ගනිමු. α හා β දෙකම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.
p ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා

$$\frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

බව පෙන්වන්න.

$\frac{\alpha}{\alpha-1}$ හා $\frac{\beta}{\beta-1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $(p^2+p+2)x^2 - 2(p+1)x + p = 0$ මගින් දෙනු ලබන බවත්, මෙම මූල දෙකම ධන වන බවත් පෙන්වන්න.

(*b*) c හා d යනු **නිශ්ශුන්‍ය** තාත්ත්වික සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ද $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$ යැයි ද ගනිමු. $(x-c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බවත්, $(x-d)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය cd බවත් දී ඇත. c හා d හි අගයන් සොයන්න.
c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා, $(x+2)^2$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(*a*) $p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් යැයි සිතමු.

$x = 1,\ p^2 + 2 + p = 0$ ලැබේ. (5)

නමුත් $p > 0 \Rightarrow p^2 + 2 + p > 0$, බැවින් මෙය සිදු විය නොහැක. (5)

$\therefore\ p^2x^2 + 2x + p = 0$ හි 1 මූලයක් නොවේ. **10**

විවේචකය $\Delta = 2^2 - 4p^2 \cdot p$ (10)

$= 4(1-p^3)$

$\geq 0\ (\because\ 0 < p \leq 1)$ (5)

$\therefore\ \alpha$ හා β දෙකම තාත්ත්වික වේ. (5) **20**

$\alpha + \beta = -\frac{2}{p^2}$ හා $\alpha\beta = \frac{1}{p}$ (5) + (5)

දැන්,

$$\frac{1}{(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{(\beta-1)} = \frac{1}{(\alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1)}$$ (5)

$$= \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + 1}$$

$$= \frac{p^2}{p^2+p+2}.$$ (5) **20**

දැන්

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

$$= \frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \quad (5)$$

$$= \left(\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2}\right) \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2} \quad (5)$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} \quad (5)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2+p+2}$$

$$= \frac{p}{p^2+p+2}\,. \quad (5)$$

ඒ නයින් අවශ්‍ය වර්ගජ සමීකරණය

$$x^2 - \frac{2(p+1)}{p^2+p+2}\,x + \frac{p}{p^2+p+2} = 0$$ වේ. (10)

$$\Rightarrow \quad (p^2+p+2)\,x^2 - 2\,(p+1)\,x + p = 0 \quad (5)$$

35

$\frac{\alpha}{(\alpha-1)}$ හා $\frac{\beta}{(\beta-1)}$ යන දෙකම තාත්ත්වික වේ.

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} + \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{2(p+1)}{p^2+p+2} > 0, \quad (\because\ p > 0),$$ (5)

සහ $$\frac{\alpha}{(\alpha-1)} \cdot \frac{\beta}{(\beta-1)} = \frac{p}{p^2+p+2} > 0, \quad (\because\ p > 0)\,.$$

ඒ නයින් මෙම මූල දෙකම ධන වේ. (5)

10

(**b**) $f(x) = x^3 + 2x^2 - dx + cd$

$(x-c)$ සාධකයක් බැවින් $f(c) = 0$ වේ. **5**

$\Rightarrow c^3 + 2c^2 - dc + cd = 0$ **5**

$\Rightarrow c^2 (c+2) = 0$

$\Rightarrow c = -2 \quad (\because c \neq 0)$ **5**

$f(x)$ යන්න $(x - d)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය cd බැවින්

$f(d) = cd.$ **5**

$\Rightarrow d^3 + 2d^2 - d^2 + cd = cd$ **5**

$\Rightarrow d^3 + d^2 = 0$

$\Rightarrow d^2 (d+1) = 0$

$\Rightarrow d = -1 \quad (\because d \neq 0)$ **5**

$\therefore c = -2$ හා $d = -1.$ **30**

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2.$

$f(x)$ යන්න $(x+2)^2$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $Ax + B$ යැයි ගනිමු.

එවිට $f(x) \equiv (x+2)^2 Q(x) + (Ax + B)$; මෙහි $Q(x)$ මාත්‍රය 1 වූ බහු පදයකි.

එබැවින්, $x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x+2)^2 Q(x) + Ax + B$ වේ. **5**

$x = -2$, ආදේශයෙන් $0 = -2A + B$ ලැබේ. **5**

අවකලනය කිරීමෙන්

$$3x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 Q'(x) + 2Q(x)(x+2) + A \text{ වේ.}$$ **5**

නැවත $x = -2$ ආදේශයෙන්

$12 - 8 + 1 = A$ ලැබේ. **5**

$\therefore A = 5$ හා $B = 10$

ඒ නයින්, ශේෂය $5x + 10.$ **5** **25**

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

දීර්ඝ බෙදීම මගින්

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline x^2 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ & \underline{x^3 + 4x^2 + 4x} \\ & \quad -2x^2 - 3x + 2 \\ & \quad \underline{-2x^2 - 8x - 8} \\ & \qquad\quad 5x + 10. \end{array}$$

(15)

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 \equiv (x^2 + 4x + 4)\ (x - 2) + (5x + 10)$$

$\therefore$ අවශ්‍ය ශේෂය $5x + 10$ වේ. **(10)**

25

12. (*a*) P_1 හා P_2 යනු පිළිවෙළින් $\{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $\{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$ මගින් දෙනු ලබන කුලක දෙක යැයි ගනිමු. $P_1 \cup P_2$ න් ගනු ලබන වෙනස් අකුරු 3 කින් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 කින් යුත්, අවයව 6 කින් සමන්විත මුරපදයක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත. පහත එක් එක් අවස්ථාවේ දී සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් මුරපද ගණන සොයන්න:

(i) අවයව 6 ම P_1 න් පමණක් ම තෝරා ගනු ලැබේ,

(ii) අවයව 3 ක් P_1 න් ද P_2 න් අනෙක් අවයව 3 ද තෝරා ගනු ලැබේ.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r - V_{r+2} = 6U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{(2n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{2r-1} + U_{2r}$ යැයි ගනිමු.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{(4n+5)}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(*a*) $P_1 = \{A, B, C, D, E, 1, 2, 3, 4\}$ හා $P_2 = \{F, G, H, I, J, 5, 6, 7, 8\}$

(i) P_1 න් පමණක්ම වෙනස් අක්ෂර 3 ක් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක 3 ක් තෝරා ගත හැකි වෙනස් අක්ෂර ගණන $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3$ (10)

ඒ නයින්, අවයව 6 ම P_1 ගෙන සෑදිය හැකි මුර පද ගණන $= {}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6!$ (5)

$= 28800$ (5)

20

(ii)

තෝරිය හැකි වෙනස් ආකාර				මුර පද ගණන	
P_1 න්		P_2 න්			
අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක	අක්ෂර	සංඛ්‍යාංක		
3	–	–	3	${}^5C_3 \cdot {}^4C_3 \cdot 6! = 28800$	(10)
2	1	1	2	${}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot {}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot 6! = 864000$	(10)
1	2	2	1	${}^5C_1 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^5C_2 \cdot {}^4C_1 \cdot 6! = 864000$	(10)
–	3	3	–	${}^4C_3 \cdot {}^5C_3 \cdot 6! = 28800$	(10)

ඒ නයින්, අවයව 3 ක් P_1 න් ද, අනෙක් අවයව 3 ක් P_2 න් ද තෝරාගෙන සෑදිය හැකි

වෙනස් මුර පද ගණන $= 28800 + 864000 + 864000 + 28800 = 1785600$

(10)

50

(b) $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+3)(r+4)}$ හා $V_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$; $r \in \mathbb{Z}^+$.

එවිට,

$$V_r - V_{r+2} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$$ (5)

$$= \frac{(r+3)(r+4) - r(r+1)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}$$

$$= \frac{6(r+2)}{r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}$$ (5)

$$= 6U_r$$ (5)

15

එවිට,

$r = 1;\quad 6U_1 = V_1 - V_3,$

$r = 2;\quad 6U_2 = V_2 - V_4,$ (10)

$r = 3;\quad 6U_3 = V_3 - V_5,$

$r = 4;\quad 6U_4 = V_4 - V_6,$

$\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots$

$r = n-3;\quad 6U_{n-3} = V_{n-3} - V_{n-1}$

$r = n-2;\quad 6U_{n-2} = V_{n-2} - V_n$ (10)

$r = n-1;\quad 6U_{n-1} = V_{n-1} - V_{n+1}$

$r = n;\quad 6U_n = V_n - V_{n+2}$

$$\therefore \quad 6\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 + V_2 - V_{n+1} - V_{n+2} \quad \text{(10)}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad \text{(5)}$$

$$= \frac{5}{24} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{144} - \frac{2n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \quad \text{(5)}$$

40

$$W_r = U_{2r-1} + U_{2r}, \quad r \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{2r-1} + U_{2r})$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r \quad \text{(5)}$$

$$= \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{6(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)} \quad \text{(5)}$$

10

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{144} - \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}\right) \quad \text{(5)}$$

$$= \frac{5}{144} - \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{24(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{5}{144} \quad \text{(5)}$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර එහි ඓක්‍යය $\frac{5}{144}$ වේ. (5)

15

13.(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 4 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$ යනු $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$ වන පරිදි වූ න්‍යාස යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$a = 2$ හා $b = 1$ බව පෙන්වන්න.

තව ද $\mathbf{C}^{-1}$ **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{P}^{-1}$ ලියා දක්වා, $2\mathbf{P}(\mathbf{Q} + 3\mathbf{I}) = \mathbf{P} - \mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{Q}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(b) $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\operatorname{Re} z \le |z|$, හා

(ii) $z_2 \ne 0$ සඳහා $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

බව පෙන්වන්න.

$z_1 + z_2 \ne 0$ සඳහා $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \le \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$z_1 + z_2 \ne 0$ සඳහා $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$ බව සත්‍යාපනය කර,

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\omega = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)$ යැයි ගනිමු.

$1 + \omega$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r(>0)$ හා $\theta\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1+\omega)^{10} + (1+\bar{\omega})^{10} = 243$ බව පෙන්වන්න.

(a) $AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -a \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$

(5) (10)

$AB^T = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-3 & a-4 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2a - 3 = b, \quad a - 4 = -2$ සහ $a = b + 1.$ (10)

$\Leftrightarrow a = 2$ සහ $b = 1$, (ඉහත ඕනෑම සමීකරණ දෙකකින්) මෙම අගයන් ඉතිරි සමීකරණය ද තෘප්ත කරයි. (5)

30

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (5)

$\therefore C^{-1}$ නොවතී. (5) **10**

> වෙනත් ක්‍රමයක්
>
> C^{-1} පැවතීම සඳහා :
>
> $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය.
>
> $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5)
>
> (5)
>
> $\Rightarrow p - 2r = 1,\ -p + 2r = 0,\ q - 2s = 0$ හා $-q + 2s = 1$
>
> මෙය විසංවාදයකි.
>
> $\therefore C^{-1}$ නොපවතී. (5) **10**

$P = \frac{1}{2}(C - 2I) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (5)

$\Rightarrow P^{-1} = 2\left(\frac{1}{-2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (10)

$2P(Q + 3I) = P - I$

$\Leftrightarrow 2(Q + 3I) = I - P^{-1}$ (5)

$\therefore 2(Q + 3I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5)

$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3I$

$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$ (5) **30**

(*b*) $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$

(i) $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$\text{Re}\, z = x \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ (5)

(ii) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ හා $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ යැයි ගනිමු.

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\times(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\times(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\ \frac{\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}{1}$$

(5) (5)

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$ (5)

20

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) \le \left|\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|}$

(5) (i) මගින් (5) (ii) මගින්

10

$z_1 + z_2 \neq 0$ සඳහා

$$\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} = 1$$ (5)

$$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$

$$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right) = 1$$ (5)

10

$$\Rightarrow \quad 1 = \text{Re}\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + \text{Re}\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| \quad \text{(i) (5) මගින්}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|} \quad \text{(ii) මගින්}$$

$$= \frac{|z_1|+|z_2|}{|z_1+z_2|} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \quad |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \qquad (\because |z_1+z_2| > 0)$$

දැන් $z_1 + z_2 = 0$ එවිට

$$|z_1+z_2| = 0 \leq |z_1| + |z_2|$$

ඒ නයින්, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

10

(*c*) $\omega = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\, i)$

$$1 + \omega = \sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1}{2}\right)\right] = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad (5)$$

මෙහි $r = \sqrt{3}$ හා $\theta = -\frac{\pi}{6}$. (5)

10

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය මගින් $(1+\omega)^{10} = (\sqrt{3})^{10}\left[\cos(10\theta) + i\sin(10\theta)\right]$ (5)

$$1 + \overline{\omega} = \overline{1+\omega} = \sqrt{3}(\cos\theta - i\sin\theta) = \sqrt{3}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

$$\Rightarrow (1+\overline{\omega})^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{10}\left[(\cos(-10\theta) + i\sin(-10\theta)\right] \quad (5)$$

$$\therefore (1+\omega)^{10} + (1+\overline{\omega})^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{10} \times 2\cos(10\theta) \quad (5)$$

$$= 3^5 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 243. \quad (5)$$

20

---

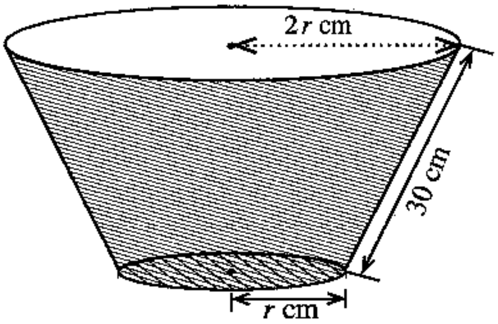
14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{9(x^2 - 4x - 1)}{(x-3)^3}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 3$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = -\dfrac{9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, $y-$ අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{18(x^2 - 33)}{(x-3)^5}$ **බව දී ඇත**. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යවල $x-$ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් පතුලක් සහිත සෘජු වෘත්තාකාර කේතු ඡින්නකයක ආකාරයෙන් වූ බේසමක් පෙන්වයි. බේසමෙහි ඇල දිග 30 cm ක් ද උඩත් වෘත්තාකාර දාරයෙහි අරය පතුලෙහි අරය මෙන් දෙගුණයක් ද වේ. පතුලේ අරය r cm යැයි ගනිමු.



බේසමේ පරිමාව V cm³ යන්න $0 < r < 30$ සඳහා

$V = \dfrac{7}{3}\pi r^2\sqrt{900 - r^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

බේසමේ පරිමාව උපරිම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

(***a***) $x \neq 3$ සඳහා ; $f(x) = \dfrac{9(x^2 - 4x - 1)}{(x-3)^3}$

එවිට

$$f'(x) = 9\left[\frac{1}{(x-3)^3}(2x-4) - \frac{3(x^2-4x-1)}{(x-3)^4}\right] \quad \textcircled{20}$$

$$= 9\left[\frac{2x^2 - 10x + 12 - 3(x^2 - 4x - 1)}{(x-3)^4}\right]$$

$$= \frac{-9(x+3)(x-5)}{(x-3)^4} \quad \text{for } x \neq 3 \quad \textcircled{5}$$

25

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \therefore\ y = 0.$ (5)

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty.$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = 3.$ (5)

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හිදී $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = -3$ හා $x = 5.$ (5)

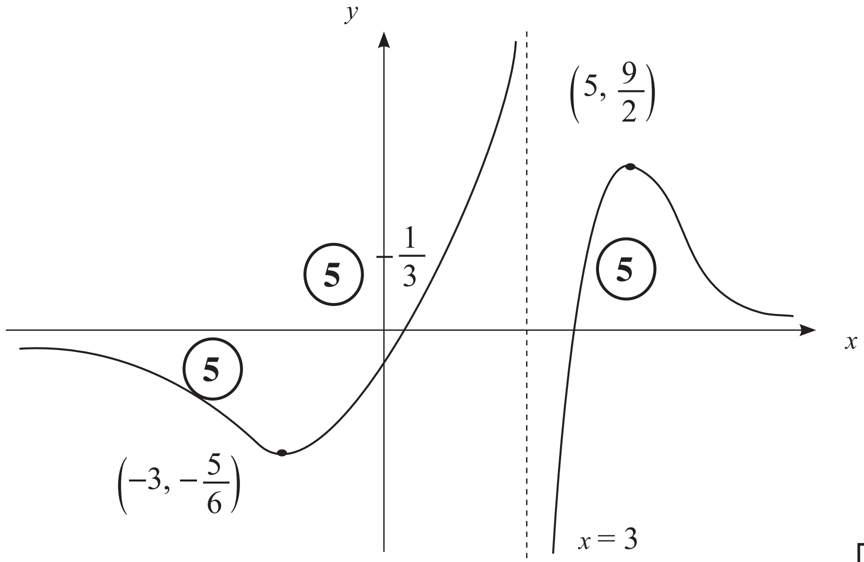
	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$

(5) (5) (5) (5)

$f(x)$ is ↘ ↗ ↗ ↘

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත : $\left(-3, -\frac{5}{6}\right)$ ස්ථානීය අවමයක් ද $\left(5, \frac{9}{2}\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක් ද වේ.

(5) (5)



60

$x \neq 3$ සඳහා ;

$$f''(x) = \frac{18\,(x-\sqrt{33}\,)\,(x+\sqrt{33})}{(x-3)^5} .$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{33}$. (5)

	$-\infty < x < -\sqrt{33}$	$-\sqrt{33} < x < 3$	$3 < x < \sqrt{33}$	$\sqrt{33} < x < \infty$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$
අවකලතාවය	යටි අවතල	උඩු අවතල	යටි අවතල	උඩු අවතල

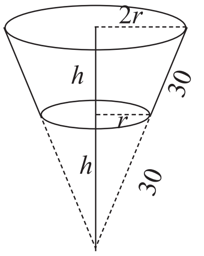
(10)

$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත. :

$x = -\sqrt{33}$ හා $x = \sqrt{33}$ එම නතිවර්තන x– ඛණ්ඩාංක වේ. (5)

20

(b)



$0 < r < 30$ සඳහා ;

$h = \sqrt{900 - r^2}$ (5)

පරිමාව V යන්න

$V = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 \times 2h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$ මගින් දෙනු ලැබේ. (5)

$= \frac{7}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{7}{3}\pi r^2 \sqrt{900 - r^2}$. (5)

15

$0 < r < 30$ සඳහා

$$\frac{dV}{dr} = \frac{7}{3}\pi\left[2r\sqrt{900 - r^2} + r^2\frac{(-2r)}{2\sqrt{900 - r^2}}\right]$$ (5)

$$= \frac{7}{3}\pi\left[\frac{2r(900 - r^2) - r^3}{\sqrt{900 - r^2}}\right]$$

$$= 7\pi r\,\frac{(600 - r^2)}{\sqrt{900 - r^2}}.$$ (5)

$\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 10\sqrt{6}$ $(\because r > 0)$ (5)

$0 < r < 10\sqrt{6}$ සඳහා $\frac{dV}{dr} > 0$ හා $r > 10\sqrt{6}$ සඳහා $\frac{dV}{dr} < 0$

(5) (5)

$r = 10\sqrt{6}$ විට V අවම වේ. (5)

30

---

15. (*a*) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 2\sin^2\theta + 3$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx$ අගයන්න.

(*b*) භින්න භාග භාවිතයෙන්, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ සොයන්න.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ යැයි ගනිමු.

$t > 2$ සඳහා $f(t) = \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int \ln(x-k)\,dx$ සොයන්න; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

ඒ නයින්, $\int f(t)\,dt$ සොයන්න.

(*c*) a හා b නියත වන $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ හි අගය සොයන්න.

(*a*) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ සඳහා :

$x = 2\sin^2\theta + 3 \Rightarrow dx = 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ (5)

$x = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ (5)

$x = 4 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ (5)

එවිට $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2-2\sin^2\theta}} \cdot 4\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ (5)

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\ d\theta$ (5)

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\ d\theta$ (5)

$= 2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$ (5)

$= \frac{\pi}{2} - 1$ (5)

40

(*b*) $x \neq 1, 2$ සඳහා

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

x හි බලවල සංගුණක සැපයීමෙන් :

x^1 : $A + B = 0$ (5)

x^0 : $-2A - B = 1$ (5)

$A = -1$ හා $B = 1$ (5)

එවිට $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)}\,dx$ (10)

$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(5) (5) (5)

40

$$f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$$

$$= \left(\ln|x-2| - \ln|x-1|\right)\Big|_3^t$$ (5)

$$= \ln(t-2) - \ln(t-1) + \ln 2 \text{ for } t > 2.$$ (5)

10

$\displaystyle\int \ln(x-k)\,dx = x\ln(x-k) - \int \frac{x}{(x-k)}\,dx$ (5)

$\displaystyle= x\ln(x-k) - \int 1\,dx - \int \frac{k}{(x-k)}\,dx$ (5)

$= x\ln(x-k) - x - k\ln(x-k) + C$ (5)

$= (x-k)\ln(x-k) - x + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

15

$\displaystyle\int f(t)\,dt = \int \ln(t-2)\,dt - \int \ln(t-1)\,dt + \int \ln 2\,dt$ (5)

$= (t-2)\ln(t-2) - t - \left[(t-1)\ln(t-1) - t\right] + t\ln 2 + D$

$= (t-2)\ln(t-2) - (t-1)\ln(t-1) + t\ln 2 + D$, මෙහි D යනු අභිමත නියතයකි.

(5)

10

(c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+e^{-x}}\,dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad (5)$$

10

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\,dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e^x)\cos^2 x}{(1+e^x)}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2x)\,dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} \quad (5)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x} = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

25

---

16. $12x-5y-7=0$ හා $y=1$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

l යනු මෙම රේඛාවලින් සෑදෙන සුළු කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය යැයි ගනිමු. l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

P යනු l මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. P හි ඛණ්ඩාංක $(3\lambda+1, 2\lambda+1)$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

$B \equiv (6,0)$ යැයි ගනිමු. B හා P ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S+\lambda U=0$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $S \equiv x^2+y^2-7x-y+6$ හා $U \equiv -3x-2y+18$ වේ.

$S=0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය බව **අපෝහනය** කරන්න.

$U=0$ යනු l ට ලම්බව, B හරහා යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය බව පෙන්වන්න.

සියලු $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S+\lambda U=0$ සමීකරණය සහිත වෘත්ත මත වූ ද B වලින් ප්‍රභින්න වූ ද අචල ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$S=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය, $S+\lambda U=0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තයට ප්‍රලම්බ වන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

$12x-5y-7=0$ හා $y=1 \Rightarrow x=1, \quad y=1$

$\therefore \ A \equiv (1,1)$ (10)

10

සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{12x-5y-7}{13} = \pm \frac{(y-1)}{1}$$ (10)

$\Rightarrow 12x-5y-7 = 13(y-1)$ or $12x-5y-7 = -13(y-1)$

$\Rightarrow 2x-3y+1 = 0$ or $3x+2y-5 = 0$ (5) + (5)

$y=1$ හා $2x-3y+1 = 0$ අතර කෝණය සුළු θ නම්

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{3}-0}{1+\frac{2}{3}(0)}\right| = \frac{2}{3} < 1 \text{ වේ.}$$ (5)

$\therefore \ l: \ 2x-3y+1=0.$ (5)

30

---

l මත වූ (x, y) ලක්ෂ්‍යය සඳහා

$\dfrac{(x-1)}{3} = \dfrac{(y-1)}{2} = \lambda$ (යැයි ගනිමු.) (5)

$\Rightarrow x = 3\lambda + 1, \quad y = 2\lambda + 1.$ (5)

10

$\therefore \; P \equiv (3\lambda + 1,\; 2\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

දැන් $B \equiv (6, 0)$ හා $P \equiv (3\lambda + 1,\; 2\lambda + 1)$

$\therefore$ BP විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x-6)\;(x - (3\lambda + 1)) + (y-0)\;(y - (2\lambda + 1)) = 0$ මගින් දෙනු ලැබේ. (10)

එනම් $(x^2 + y^2 - 7x - y + 6) + \lambda\,(-3x - 2y + 18) = 0$ (5)

මෙය $S + \lambda U = 0$, ආකාරයෙන් වේ. මෙහි $S \equiv x^2 + y^2 - 7x - y + 6$ හා $U \equiv -3x - 2y + 18$ වේ.

(5) (5)

25

$S = 0$ යක්ත $\lambda = 0$ ට අනුරූප වේ. $\Rightarrow P = (1, 1) \equiv A.$ (5)

$\therefore$ $S = 0$ යනු AB විෂ්කම්භයක් වූ වෘත්තය වේ. (5)

l හි බෑවුම $\dfrac{2}{3}$ නිසා l ට ලම්බව B හරහා යන රේඛාවේ සමීකරණය $3x + 2y + \mu = 0$ වේ;

මෙහි μ යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි. (10)

B ලක්ෂ්‍යය $3x + 2y + \mu = 0$ මත බැවින් $18 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -18$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $3x + 2y - 18 = 0$ වේ.

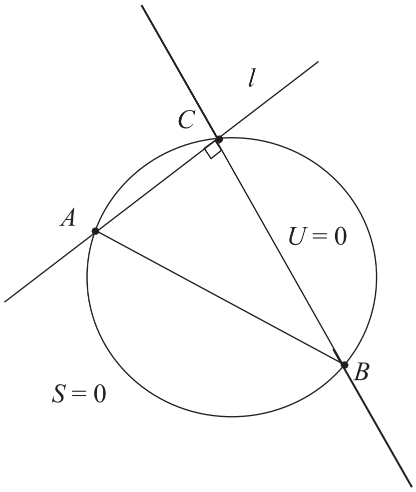
එනම් $U = -3x - 2y + 18 = 0.$

20

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $S + \lambda U = 0$ යන්න $S = 0$ හා $U = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි. (10)

මෙම ලක්ෂ්‍ය වලින් එකක් B වන අතර අනෙක් C ලක්ෂ්‍යය l හා $U = 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ.

(10)



$\therefore$ C හි ඛණ්ඩාංක

$u \equiv -3x - 2y + 18 = 0$

හා $l \equiv 2x - 3y + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 4$ හා $y = 3$

$\therefore$ $C \equiv (4, 3)$. (5)

25

$S = 0$ හා $S + \lambda U = 0$ ප්‍රලම්බ වේ.

$\Leftrightarrow$ $2\left(-\frac{1}{2}(3\lambda + 7)\right)\left(-\frac{7}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}(2\lambda + 1)\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 + 18\lambda + 6$

(5) (5) (5)

$\Leftrightarrow$ $13\lambda = 26$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 2.$

(5)

20

---

17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B) \text{ හා}$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ සඳහා $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta$ විසඳන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක $BD=DC$ හා $AD=BC$ වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යය AC මත පිහිටා ඇත. $B\hat{A}C=\alpha$ හා $A\hat{C}B=\beta$ යැයි ගනිමු. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+2\beta)$ බව පෙන්වන්න.

$\alpha:\beta = 3:2$ නම්, ඉහත (*a*) හි අවසාන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha=\frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\frac{\pi}{2}$ විසඳන්න. **ඒ නයින්,** $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\frac{3}{\sqrt{10}}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ ——— ① **(5)**

දැන් $\sin(A-B) = \sin(A+(-B))$ **(5)**

$= \sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$

$\therefore \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ ——— ② **(5)** **[15]**

---

① + ② $\Rightarrow \sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B,$ **(5)**

① − ② $\Rightarrow \sin(A+B)-\sin(A-B) = 2\cos A\sin B.$ **(5)** **[10]**

$0<\theta<\frac{\pi}{2}.$

$2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta,$

$\Leftrightarrow \sin 5\theta+\sin\theta = \sin 7\theta$ **(5)**

$\Leftrightarrow \sin 7\theta-\sin 5\theta-\sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sin(6\theta+\theta)-\sin(6\theta-\theta)-\sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 6\theta\sin\theta-\sin\theta = 0$ **(5)**

$\Leftrightarrow \sin\theta(2\cos 6\theta-1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6\theta = \frac{1}{2}$ since $0<\theta<\frac{\pi}{2}, \sin\theta>0$

(5)

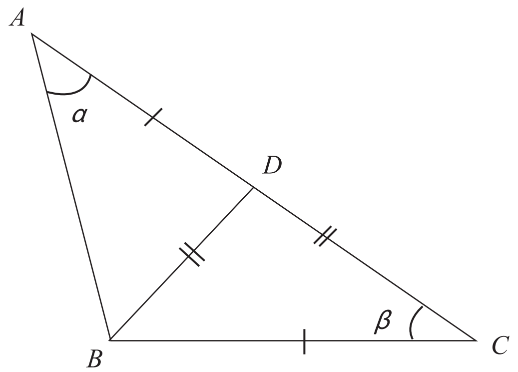
$$\Rightarrow 6\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \; ; \; n \in \mathbb{Z}.$$ (5) + (5)

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18} \; ; \; n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$ (5)

30

(b)



$C\hat{B}D = \beta,\ A\hat{D}B = 2\beta,$

හා $A\hat{B}D = \pi - (\alpha + 2\beta)$

සයින් නීතිය යෙදීමෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{BD}{\sin B\hat{A}D} = \frac{AD}{\sin A\hat{B}D}$$ (10)

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\pi - (\alpha + 2\beta))}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\alpha + 2\beta)} \quad \text{———} \quad (1)$$ (5)

BDC ත්‍රිකෝණය සඳහා

$$\frac{CD}{\sin D\hat{B}C} = \frac{BC}{\sin B\hat{D}C}$$ (10)

$$\Rightarrow \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin 2\beta} \quad \text{———} \quad (2)$$ (5)

$\because BD = DC$ and $AD = BC$, (1) න් හා (2) න්

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin (\alpha + 2\beta)}{\sin 2\beta}$$ (5)

$\Rightarrow \quad 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta).$ (5)

40

$\alpha : \beta = 3 : 2$, නම්

$2\sin\alpha\cos\dfrac{2\alpha}{3} = \sin\dfrac{7\alpha}{3}$ වේ. (5)

$\Rightarrow \quad 2\sin 3\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)\cos 2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right) = \sin 7\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)$ (5)

$\Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{\pi}{18}, \dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{7\pi}{18}.$

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{15\pi}{18}, \dfrac{21\pi}{18}$ (5)

$\because \; BC = AD < AC$, α සුළු කෝණයක් විය යුතුය.

$\therefore \; \alpha = \dfrac{\pi}{6}.$ (5)

20

(c) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

$\alpha = \tan^{-1}(x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(x+1)$ යැයි ගනිමු. $x \neq \pm 1$ බව දනිමු.

එවිට $2\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}.$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$

$\Leftrightarrow \quad \tan 2\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right)$ (5)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \cot\beta$ (5)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{1}{x+1}$ (5)

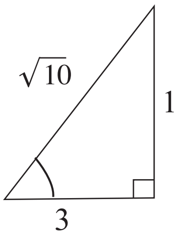
$\Leftrightarrow \quad 2x = 1 - x \quad (\because \; x \neq \pm 1)$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}.$ (5)

25

$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}.$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$



$\Rightarrow \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ (5)

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (5)

10

අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2019

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

(නව නිර්දේශය)

ලකුණු බෙදීයාම

II පත්‍රය

A කොටස : 10 × 25 = 250

B කොටස : 05 × 150 = 750

එකතුව = 1000 / 10

II පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

1. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A, B හා C අංශු තුනක් එම පිළිවෙළින්, සුමට තිරස් මේසයක් මත සරල රේඛාවක තබා ඇත. A අංශුවට u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන්නේ එය B අංශුව සමග සරල ලෙස ගැටෙන පරිදි ය. A අංශුව සමග ගැටුන පසු, B අංශුව චලනය වී C අංශුව සමග සරල ලෙස ගැටේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. පළමු ගැටුමෙන් පසුව B හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

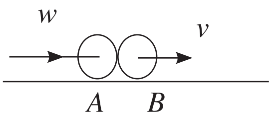
B හා C අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය ද e වේ. B සමග ගැටුමෙන් පසුව C හි ප්‍රවේගය ලියා දක්වන්න.

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

A හා B සඳහා (පළමු ගැටුමට) $\rightarrow$:

$$0 = mv + mw - mu \quad \text{(5)}$$

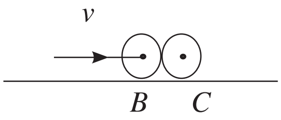
$$\Rightarrow v + w = u \text{ ——— (i)}$$



නිව්ටන් ප්‍රත්‍යාගති නියමය :

$$v - w = eu \text{ ——— (ii)} \quad \text{(5)}$$

$$\therefore \text{(i)} + \text{(ii)} \Rightarrow v = \frac{(1+e)}{2}u \quad \text{(5)}$$



$\therefore$ පළමු ගැටුමට පසුව B හි ප්‍රවේගය $= \dfrac{1}{2}(1+e)\,u.$

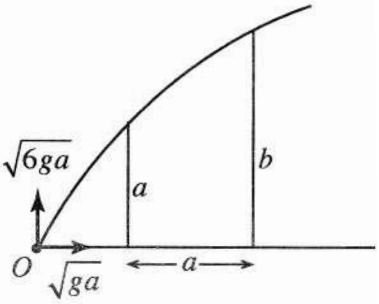
v මගින් u ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්, B සමග ගැටුමට පසුව C හි ප්‍රවේගය $= \dfrac{1}{2}(1+e)\,v$ (5)

$$= \frac{1}{4}(1+e)^2 u \quad \text{(5)}$$

25

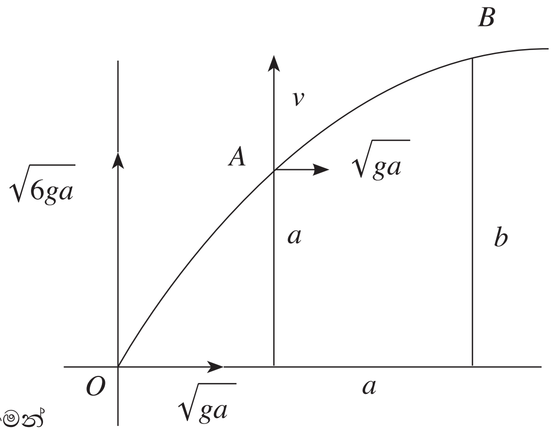
2. තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙළින් $\sqrt{ga}$ හා $\sqrt{6ga}$ සහිත ප්‍රවේගයකින් තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, එකිනෙකට a තිරස් දුරකින් පිහිටි උස a හා b වූ සිරස් තාප්ප දෙකකට යාන්තමින් ඉහළින් අංශුව යයි. උස a වූ තාප්පය පසු කරන විට අංශුවේ ප්‍රවේගයෙහි සිරස් සංරචකය $2\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න.

$b = \frac{5a}{2}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.



අංශුව, උස a වූ තාප්පය පසුකර යනවිට, එහි සිරස් ප්‍රවේග සංරචකය v යැයි සිතමු.

O සිට A දක්වා, $\uparrow$ $v^2 = u^2 + 2as$:



$v^2 = 6ga - 2g \,.\, a = 4ga$ (5)

$\therefore v = 2\sqrt{ga}$ (5)

අමතර T කාලයකට පසුව එය දෙවන බිත්තිය පසුකර යයි නම්,

A සිට B දක්වා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ $\rightarrow$ හා $\uparrow$, යෙදීමෙන්

$a = \sqrt{ga} \,.\, T,$ (5)

හා $b - a = 2\sqrt{ga} \,.\, T - \frac{1}{2} gT^2$ (5)

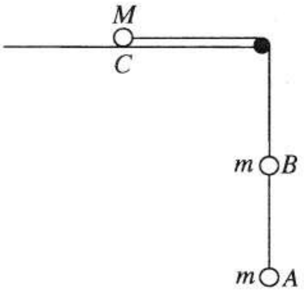
T ඉවත් කිරීමෙන්, $b - a = 2\sqrt{ga} \,.\, \sqrt{\frac{a}{g}} - \frac{1}{2} g.\, \frac{a}{g}$

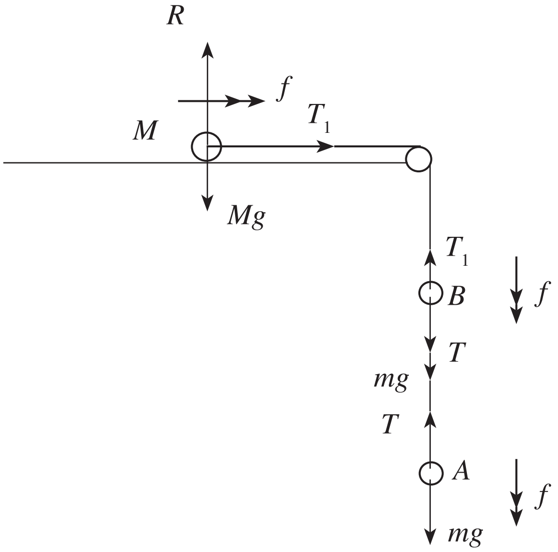
$\therefore b = a + 2a - \frac{a}{2}$

එනම්, $b = \frac{5a}{2}$ (5)

25

3. රූපයෙහි A, B හා C යනු ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m, m හා M වූ අංශු වේ. A හා B අංශු සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. සුමට තිරස් මේසයක් මත වූ C අංශුව, මේසයේ දාරයට සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පියක් මතින් යන තවත් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් B ට ඈඳා ඇත. අංශු හා තන්තු සියල්ලම එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තු නොබුරුල්ව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. A හා B යා කරන තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.





$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

A සඳහා $\downarrow$ $mg - T = mf$ (5)

B සඳහා $\downarrow$ $T + mg - T_1 = mf$, (5)

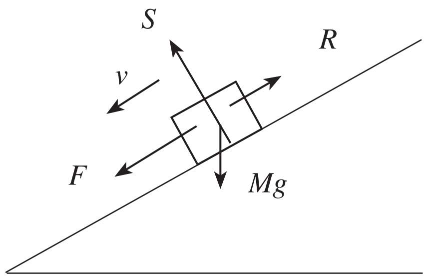
C සඳහා $\rightarrow$ $T_1 = Mf$ (5)

බල (5)

ත්වරණ (5)

25

4. ස්කන්ධය M kg හා P kW නියත ජවයකින් යුත් කාරයක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ පහළට චලනය වේ. එහි චලිතයට $R\,(> Mg\sin\alpha)$ N නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. එක්තරා මොහොතක දී කාරයේ ත්වරණය a ms^{-2} වේ. මෙම මොහොතේ දී කාරයේ ප්‍රවේගය සොයන්න.
මාර්ගය දිගේ පහළට කාරයට චලනය විය හැකි නියත වේගය $\dfrac{1000P}{R - Mg\sin\alpha}$ ms^{-1} බව **අපෝහනය** කරන්න.



කාරයෙහි වේගය $v\ ms^{-1}$ වන විට,

ප්‍රකර්ෂණ බලය $F = \dfrac{1000\,P}{v}$ (5)

ත්වරණය $a\ ms^{-2}$ වන මොහොතේ දී,

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

↙ $F + Mg\sin\alpha - R = Ma.$ (10)

$$\Rightarrow \frac{1000\,P}{v} + Mg\sin\alpha - R = Ma$$

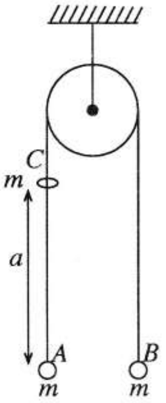
$$\therefore\quad v = \frac{1000\,P}{R - Mg\sin\alpha + Ma}$$ (5)

කාරය නියත වේගයෙන් චලනය වන විට $a = 0$ වන අතර නියත වේගයේ අගය

$$v = \frac{1000\,P}{R - Mg\sin\alpha}\ .$$ (5)

25

5. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. A ට සිරස්ව a දුරක් ඉහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරින ලද ස්කන්ධය m ම වූ C කුඩා පබළුවක් ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය වී A සමග ගැටී හා වේ. (රූපය බලන්න.) A හා C අතර ගැටුම සිදු වන මොහොතේ දී තන්තුවේ ආවේගය ද ඉහත ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු B ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය ද නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

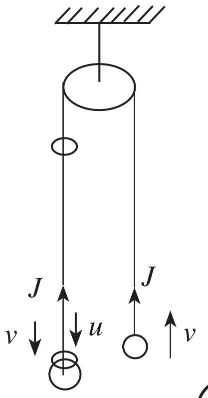


$v^2 = u^2 + 2as \downarrow$ යෙදීමෙන්,

a දුරක් වැටීමේදී C ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය $u = \sqrt{2ga}$ **(5)**

C හා A ගැටෙන මොහොතේදී තන්තුවේ ආවේගය J යැයිද,

ගැටුමට මොහොතකට පසුව B හි ප්‍රවේගය v යැයිද ගනිමු.



(5) v සඳහා

එවිට, $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

B සඳහා $\uparrow \quad J = mv.$ **(5)**

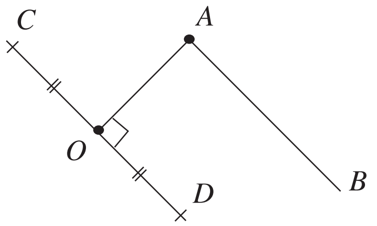
A හා C සඳහා $\downarrow \quad -J = (m + m)\,v - mu.$ **(10)**

එනම් $-J = 2mv - m\sqrt{2ga}$.

25

6. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ හා $3\mathbf{i}-\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. $A\hat{O}C = A\hat{O}D = \frac{\pi}{2}$ හා $OC = OD = \frac{1}{3}AB$ වන පරිදි වූ C හා D ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි පිහිටුම් දෛශික සොයන්න.

සටහන :



$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (3\mathbf{i} - \mathbf{j})$

$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (5)

$\therefore AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{OC} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i}$ යැයි ගනිමු.

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ නිසා, $(2\mathbf{j} + \mathbf{j}) . (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 0$

$\therefore y = -2x$ (5)

$OC = \frac{1}{3}AB$ නිසා, $\sqrt{x^2 + 4x^2} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ (5)

$\therefore x^2 = \frac{1}{9}.$

මෙම සමීකරණ D හි ඛණ්ඩාංක සඳහා ද වලංගු වේ.

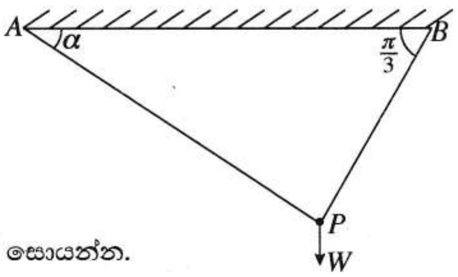
එම නිසා, $x = \pm\frac{1}{3}.$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{array}\right\}$ (5) $\quad \left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$ (5)

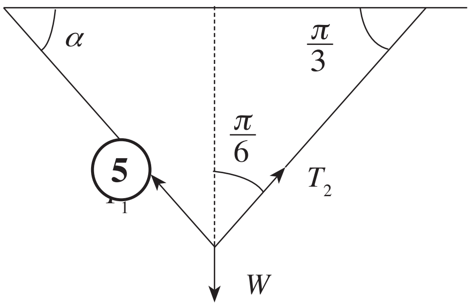
එම නිසා, C හා D හි පිහිටුම් දෛශික වන්නේ, $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$ හා $-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$ වේ.

25

7. තිරස සමග පිළිවෙළින් α හා $\frac{\pi}{3}$ කෝණ සාදන AP හා BP සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් තිරස් සිවිලිමකින් එල්ලා ඇති බර W වූ P අංශුවක්, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවයේ පවතී. AP තන්තුවේ ආතතිය, W හා α ඇසුරෙන් සොයන්න.
ඒ නයින්, මෙම ආතතියේ අවම අගයත් එයට අනුරූප α හි අගයත් සොයන්න.



ලාමී ප්‍රමේයයෙන්,



$$\frac{T_1}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{6}\right)} \quad (10)$$

(5)

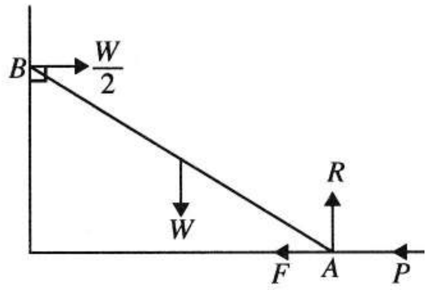
$$\therefore\ T_1 = \frac{W}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)} \quad (5)$$

එම නිසා AP හි T_1 ආතතියේ අවම අගය $=\frac{W}{2}$ වන අතර, T_1 හි අවමයට අනුරූප α හි අගය $\alpha=\frac{\pi}{6}$ වේ.

(5)

25

8. දිග $2a$ හා බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එහි A කෙළවර රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ද B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද තබා ඇත. බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ A කෙළවරේ දී බිත්තිය දෙසට යෙදූ විශාලත්වය P වන තිරස් බලයක් මගිනි. රූපයේ F හා R මගින් පිළිවෙළින් A හි දී ඝර්ෂණ බලය හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව දක්වා ඇත. B හි දී බිත්තිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව, රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි $\frac{W}{2}$ ද දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{4}$ ද නම්, $\frac{W}{4} \leq P \leq \frac{3W}{4}$ බව පෙන්වන්න.



දණ්ඩේ සමතුලිතතාව සඳහා

විභේදනයෙන් $\uparrow$ $R - W = 0.$ (5)

$\leftarrow$ $P + F - \frac{W}{2} = 0.$ (5)

$\therefore F = \frac{W}{2} - P$ (5)

$\because |F| \leq \mu R$

(5)

$\left|\frac{W}{2} - P\right| \leq \frac{1}{4} W$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} W \leq \frac{W}{2} - P \leq \frac{1}{4} W$

$\Rightarrow \frac{W}{4} \leq P \leq \frac{3W}{4}$ (5)

25

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ හා $P(A' \cap B) = \frac{1}{10}$ බව දී ඇත. $P(B)$ හා $P(A' \cap B')$ සොයන්න; මෙහි A' හා B' වලින් පිළිවෙළින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි දැක්වේ.

$$P(B) = P\big((A \cap B) \cup (A' \cap B)\big) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \quad (5)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{10}.$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

$$P(A' \cap B') = P\big((A \cup B)'\big)$$

$$= 1 - P(A \cup B) \quad (5)$$

$$= 1 - [\,P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,] \quad (5)$$

$$= 1 - [\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}]$$

$$= 1 - \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A' \cap B') = \frac{3}{10} \quad (5)$$

25

10. එක එකක් 5 ට අඩු ධන නිඛිල පහකට මාතයන් දෙකක් ඇති අතර ඉන් එකක් 3 වේ. ඒවායේ මධ්‍යන්‍යය හා මධ්‍යස්ථය යන දෙකම 3 ට සමාන වේ. මෙම නිඛිල පහ සොයන්න.

මධ්‍යස්ථය $= 3$ හා ප්‍රභින්න මාත දෙකක් සහිතව පහට අඩු සංඛ්‍යා පහක්, ආරෝහණ පිළිවෙළට සකස් කළ විට පහත දැක්වෙන ආකාර දෙකකි.

$a, a, 3, 3, 4$ (5)

$b, 3, 3, 4, 4$ (5)

මධ්‍යන්‍යය 3 බැවින් ඒවායේ ඓක්‍යය 15 වේ.

එවිට $2a + 10 = 15$; $a = \frac{5}{2}$, # (5)

හෝ $b + 14 = 15$; $b = 1$. (5)

$\therefore$ සංඛ්‍යා පහ වන්නේ 1, 3, 3, 4, 4 (5)

25

11. (*a*) P හා Q මෝටර් රථ දෙකක් සෘජු පාරක් දිගේ නියත ත්වරණ සහිතව එකම දිශාවකට චලනය වේ. කාලය $t=0$ හි දී P හි ප්‍රවේගය $u\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ද Q හි ප්‍රවේගය $(u+9)\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ද වේ. P හි නියත ත්වරණය $f\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ද Q හි නියත ත්වරණය $\left(f+\frac{1}{10}\right)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ද වේ.

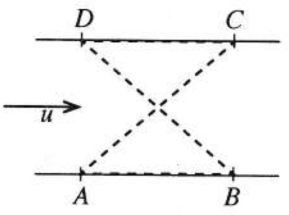
(i) $t \geq 0$ සඳහා P හා Q හි චලිතවලට, එකම රූපයක හා

(ii) $t \geq 0$ සඳහා P ට සාපේක්ෂව Q හි චලිතයට, වෙනම රූපයක,

ප්‍රවේග-කාල වක්‍රවල දළ සටහන් අඳින්න.

කාලය $t=0$ හි දී P මෝටර් රථය Q මෝටර් රථයට වඩා මීටර 200 ක් ඉදිරියෙන් සිටි බව තවදුරටත් දී ඇත. P පසුකර යෑමට Q මගින් ගනු ලබන කාලය සොයන්න.

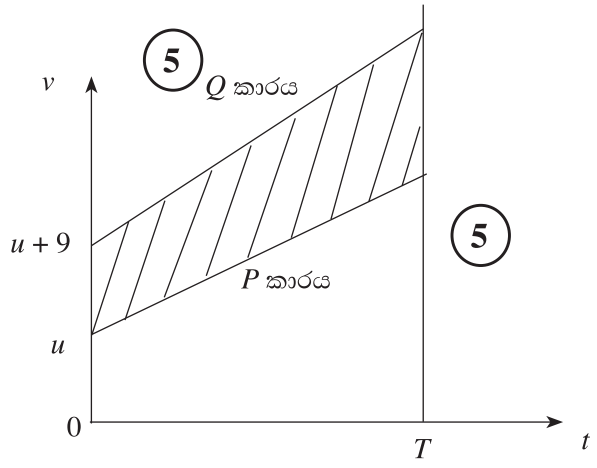
(*b*) සමාන්තර සෘජු ඉවුරු සහිත පළල a වූ ගඟක් u ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ගලයි. රූපයෙහි, A, B, C හා D යන ඉවුරු මත වූ ලක්ෂ්‍ය සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂ වේ. ජලයට සාපේක්ෂව නියත $v(>u)$ වේගයෙන් චලනය වන B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකක් එකම මොහොතක A සිට ඒවායේ ගමන් ආරම්භ කරයි. B_1 බෝට්ටුව පළමුව $\overrightarrow{AC}$ දිගේ C වෙත ගොස් ඉන්පසු $\overrightarrow{CD}$ දිශාවට ගඟ දිගේ ඉහළට D වෙත යයි. B_2 බෝට්ටුව පළමුව $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට ගඟ දිගේ පහළට B වෙත ගොස් ඉන්පසු $\overrightarrow{BD}$ දිගේ D වෙත යයි. එකම රූපයක, B_1 හි A සිට C දක්වා ද B_2 හි B සිට D දක්වා ද චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න.



ඒ නයින්, A සිට C දක්වා චලිතයේ දී B_1 බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2-u^2}+u\right)$ බව පෙන්වා B සිට D දක්වා චලිතයේ දී B_2 බෝට්ටුවේ වේගය සොයන්න.

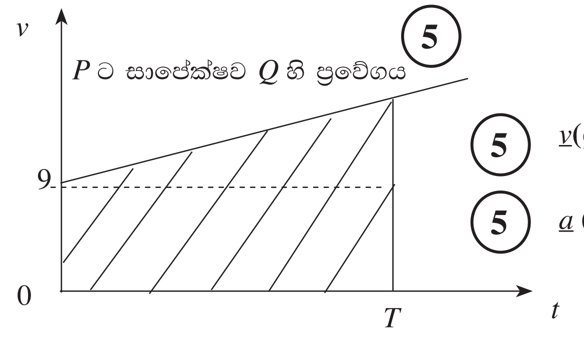
B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකම එකම මොහොතක දී D වෙත ළඟා වන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(*a*)



(5)

10



(5) $\underline{v}(Q, P) = (u+9) - u = 9.$

(5) $\underline{a}\,(Q, P) = (f + \frac{1}{10}) - f = \frac{1}{10}.$

15

$t = 0$ වේලාවේ දී, P කාරයට 200m ඉදිරියෙන් Q ඇත.

අඳුරු කළ කොටසෙහි වර්ගඵලය (ප්‍රස්තාර දෙකෙන් ඕනෑම එකක) $= 200.$ (5)

P පසුකර යැමට ගන්නා කාලය T යැයි ගනිමු.

$\therefore \ \frac{1}{2}T\left(9+9+\frac{1}{10}T\right) = 200$ (5) (5)

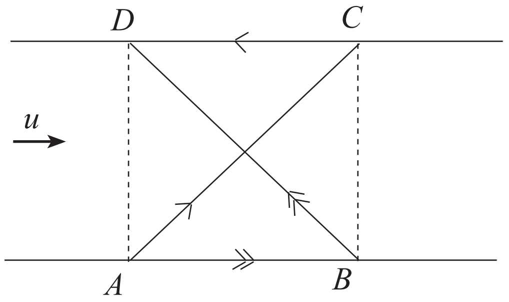
$\Rightarrow \quad T^2 + 180T - 4000 = 0$ (5)

$\Rightarrow \quad (T-20)(T+200) = 0$

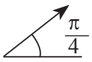
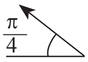
$T > 0$ බැවින්, $T = 20.$ (5)

25

(*b*)



සටහන

$\mathbf{V}(B_1, E) =$  , (5) $\mathbf{V}(B_2, E) =$  (5)

$\mathbf{V}(W, E) = \rightarrow u,$ (5)

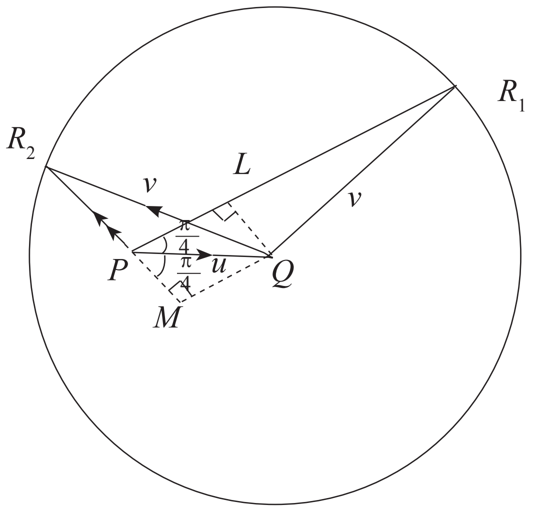
$\mathbf{V}(B_i, W) = v,$ for $i = 1, 2.$

$\mathbf{V}(B_i, E) = \mathbf{V}(B_i, W) + \mathbf{V}(W, E)$ (10)

$= \mathbf{V}(W, E) + \mathbf{V}(B_i, W)$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i} \quad i = 1, 2$

$= \overrightarrow{PR_i}, \quad i = 1, 2$



(15) + (15)

55

PQR_1 ත්‍රිකෝණයේ,

$PR_1 = PL + LR_1$

$= \frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{v^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2v^2 - u^2} + u\right]$ (10)

A සිට C දක්වා B_1 හි වේගය $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2-u^2}+u\right)$

PQR_2 ත්‍රිකෝණයේ,

$$PR_2 = MR_2 - MP = \sqrt{v^2-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2v^2-u^2}-u\right) \quad (10)$$

20

A සිට C දක්වා $\overrightarrow{AC}$ දිගේ චලනය වීමට හා ඊළඟට C සිට D දක්වා $\overrightarrow{CD}$ දිගේ චලනය වීමට B_1 ගන්නා කාලය වන්නේ

$$T_1 = \frac{a\sqrt{2}}{PR_1} + \frac{a}{v-u}. \quad (5)$$

A සිට B දක්වා $\overrightarrow{AB}$ දිගේ චලනය වීමට හා ඊළඟට B සිට D දක්වා $\overrightarrow{BD}$ දිගේ චලනය වීමට B_2 ගන්නා කාලය වන්නේ

$$T_2 = \frac{a}{v+u} + \frac{a\sqrt{2}}{PR_2} \quad (5)$$

$$T_2 - T_1 = a\sqrt{2}\left(\frac{1}{PR_2}-\frac{1}{PR_1}\right) - a\left(\frac{1}{v-u}-\frac{1}{v+u}\right) \quad (5)$$

$$= a\sqrt{2}\left(\frac{PR_1-PR_2}{PR_1 . PR_2}\right) - \frac{2au}{v^2-u^2}$$

$$= \frac{a\sqrt{2} . \sqrt{2}\, u}{\frac{1}{2}\left[(2v^2-u^2)-u^2\right]} - \frac{2au}{v^2-u^2} \quad (5)$$

$$= \frac{2au}{v^2-u^2} - \frac{2au}{v^2-u^2}$$

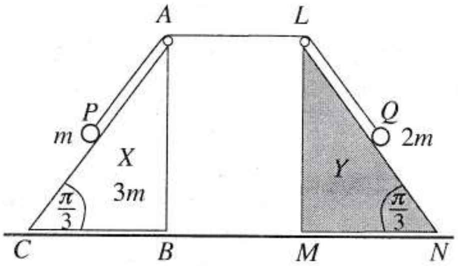
$$= 0. \quad (5)$$

එම නිසා, B_1 හා B_2 බෝට්ටු දෙකම එකම මොහොතේ D වෙත ළඟා වේ.

25

---

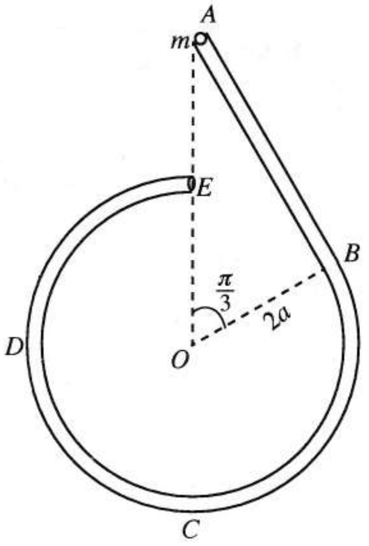
12. (*a*) රූපයෙහි ABC හා LMN ත්‍රිකෝණ, $A\hat{C}B = L\hat{N}M = \frac{\pi}{3}$ හා $A\hat{B}C = L\hat{M}N = \frac{\pi}{2}$ වූ BC හා MN අඩංගු මුහුණත් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද පිළිවෙළින් X හා Y සර්වසම සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤ දෙකක ගුරුත්ව කේන්ද්‍ර තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. ස්කන්ධය $3m$ වූ X කුඤ්ඤය ගෙබිම මත චලනය වීමට නිදහස් වන අතර Y කුඤ්ඤය **අචලව** තබා ඇත. AC හා LN රේඛා අදාළ මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. A හා L හි සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පි දෙකක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවර ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙකකට ඈඳා ඇත. රූපයේ පරිදි ආරම්භක පිහිටීමේ දී, තන්තුව නොබුරුල්ව හා $AP = AL = LQ = a$ වන ලෙස P හා Q අංශු පිළිවෙළින් AC හා LN මත අල්වා තබා ඇත. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Y වෙත යාමට X ගනු ලබන කාලය, a හා g ඇසුරෙන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.



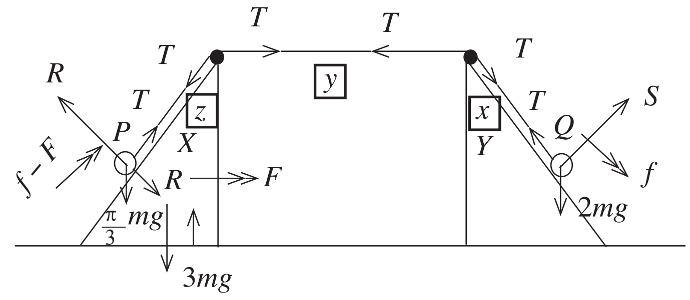
(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි සුමට සිහින් $ABCDE$ බටයක් සිරස් තලයක සවිකර ඇත. දිග $2\sqrt{3}a$ වූ AB කොටස ඍජු වන අතර එය B හි දී අරය $2a$ වූ $BCDE$ වෘත්තාකාර කොටසට ස්පර්ශක වේ. A හා E අන්ත O කේන්ද්‍රයට සිරස්ව ඉහළින් පිහිටයි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A හි දී බටය තුළ තබා නිශ්චලතාවයේ සිට සීරුවෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. $\overrightarrow{OA}$ සමග $\theta\left(\frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi\right)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට P අංශුවේ වේගය, v යන්න, $v^2 = 4ga(2-\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, එම මොහොතේ දී P අංශුව මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

P අංශුව A සිට B දක්වා චලිතයේ දී එය මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.

P අංශුව B පසු කරන විට P අංශුව මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ක්ෂණිකව වෙනස් වන බව පෙන්වන්න.



(*a*)



බල **15**

ත්වරණ **20**

Acc of (X, E) = $\twoheadrightarrow F$ $\qquad x + y + z$ නියතයකි.

Acc of (Q, E) = f (බෑවුම දිගේ, $\frac{\pi}{3}$), ($\because$ Y අචල නිසා) $\qquad \Rightarrow \ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} = 0$

Acc of (P, X) = $f - F$ (බෑවුම දිගේ ඉහළට) $\qquad \Rightarrow -\ddot{z} = \ddot{x} - (-\ddot{y})$

$\therefore$ Acc of (P, E) = $\twoheadrightarrow F$ + $f - F$ ($\frac{\pi}{3}$) $\qquad = f - F$

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්

P අංශුවට X හි චලිතය සඳහා ;

$\rightarrow T = 3mF + m\left(F + \frac{f-F}{2}\right)$ **15**

P හි චලිතය සඳහා ;

$$\nearrow \frac{\pi}{3} \quad T - mg\frac{\sqrt{3}}{2} = m\left(f - F + \frac{F}{2}\right) \quad (10)$$

Q හි චලිතය සඳහා ;

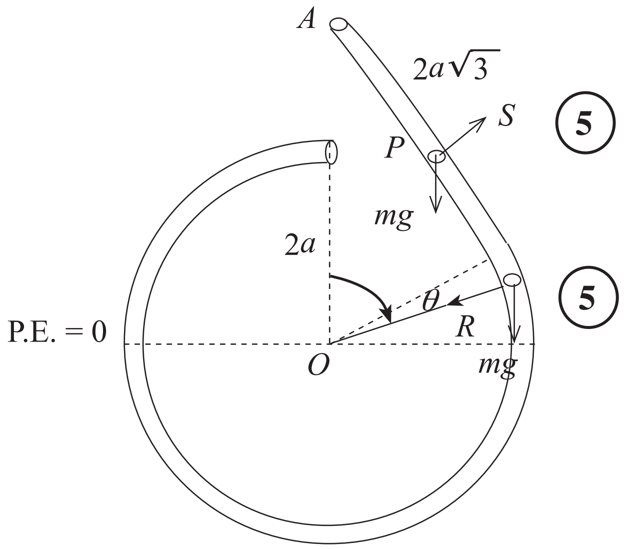
$$\searrow \frac{\pi}{3} \quad 2\,mg\frac{\sqrt{3}}{2} - T = 2mft \quad (10)$$

X ට Y වෙත ළඟා වීමට ගත වන කාලය t :

$$a = \frac{1}{2}Ft^2 \quad (10) \qquad \left(s = ut + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \text{for } X\right)$$

80

(*b*)



(5) (5)

P අංශුවට ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\,(2a\cos\theta) = 0 + mg.\,4a \quad (15)$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 4ga\,(2 - \cos\theta),\ \frac{\pi}{3} < \theta < 2\pi \quad (5)$$

නළය ඇතුළත වෘත්ත චලිතය සඳහා $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ $\swarrow$:

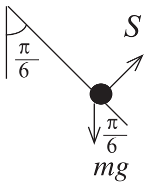
$$mg\cos\theta + R = \frac{mv^2}{2a} = 2mg\,(2 - \cos\theta) \quad (10) + (5)$$

$$\Rightarrow \quad R = mg\,(4 - 3\cos\theta) > 0 \quad \text{—— (i)} \quad (5)$$

$\therefore$ මෙම ප්‍රතික්‍රියාව O කේන්ද්‍රය වෙතට වේ.

50

සෘජු නළය ඇතුළත චලිතය සඳහා **F** = ma ↗ :



$$S - mg\cos\frac{\pi}{3} = m\,(0)$$

$$S = \frac{mg}{2}$$ (5)

B වෙත ළඟා වීමට මොහොතකට පෙර ප්‍රතික්‍රියාව $= \frac{mg}{2}$ ↗ (5)

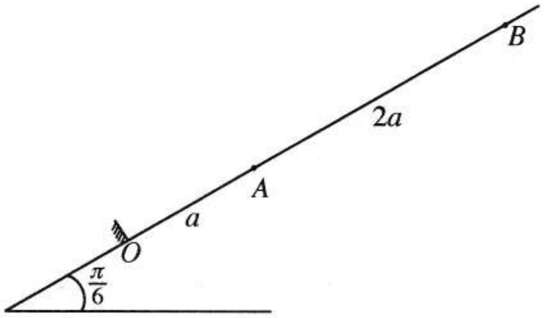
B වෙත පසු කර මොහොතකට පසු ප්‍රතික්‍රියාව $= \frac{5}{2}\,mg$ ↙ (5)

ඒ අනුව, B හිදී ප්‍රතික්‍රියාව විශාලත්වයෙන් $\frac{mg}{2}$ සිට $\frac{5}{2}mg$ දක්වා වෙනස් වන අතර දිශාව පිටත සිට ඇතුළතට වෙනස් වේ. (5)

20

---

13. තිරසට $\frac{\pi}{6}$ කෝණයකින් ආනත සුමට අචල තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් මත $OA = a$ හා $AB = 2a$ වන පරිදි O පහළම ලක්ෂ්‍යය ලෙස ඇතිව O, A හා B ලක්ෂ්‍ය එම පිළිවෙළින් පිහිටා ඇත. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇත. P අංශුව B ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වන තෙක් තන්තුව OAB රේඛාව දිගේ අදිනු ලැබේ. ඉන්පසු P අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. B සිට A දක්වා P හි චලිත සමීකරණය, $0 \le x \le 2a$ සඳහා, $\ddot{x}+\frac{g}{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $AP = x$ වේ.



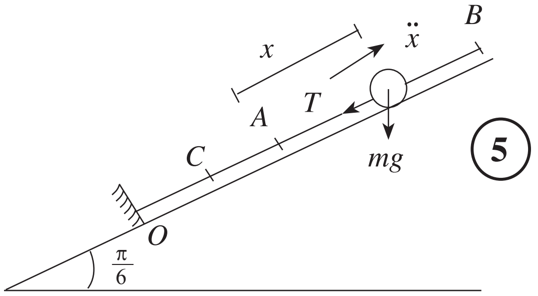
$y = x+\frac{a}{2}$ යැයි ගෙන ඉහත චලිත සමීකරණය $\frac{a}{2} \le y \le \frac{5a}{2}$ සඳහා $\ddot{y}+\omega^2 y = 0$ ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ වේ.

ඉහත සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය සොයා $\dot{y}^2 = \omega^2(c^2 - y^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, c විස්තාරය හා A වෙත ළඟා වන විට P හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

O වෙත ළඟා වන විට P හි ප්‍රවේගය $\sqrt{7ga}$ බව පෙන්වන්න.

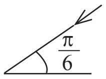
B සිට O දක්වා චලනය වීමට P මගින් ගනු ලබන කාලය $\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)+2k\right\}$ බවත් පෙන්වන්න; මෙහි $k = \sqrt{7}-\sqrt{6}$ වේ.

P අංශුව O වෙත ළඟා වන විට, තලයට ලම්බව O හි සවිකර ඇති සුමට බාධකයක් හා එය ගැටෙයි. බාධකය හා P අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $0 < e \le \frac{1}{\sqrt{7}}$ නම්, පසුව සිදු වන P හි චලිතය සරල අනුවර්තී **නොවන** බව පෙන්වන්න.



(5)

P හි චලිතය සඳහා : $\underline{F} = m\underline{a}$ ↙



$$T + mg\frac{1}{2} = m(-\ddot{x}) \text{ — (i)}$$ (10)

$$T = mg\left(\frac{x}{a}\right) \text{ — (ii)}$$ (5)

(i) හා (ii) න් $\Rightarrow \quad \ddot{x}+\frac{g}{a}\left(x+\frac{g}{2}\right) = 0, \quad 0 \le x \le 2a.$

(5) **25**

$y = x + \frac{a}{2}$ ලිවීමෙන් $\ddot{y} = \ddot{x}$ ලැබේ. (5)

$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \frac{a}{2} \leq y \leq \frac{5a}{2}$, (5)

මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{a}$ වේ. **10**

සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය C, $\ddot{x} = 0$ එනම් $y = 0$ හෝ $x = \frac{-a}{2}$. (5) + (5)

මේ අනුව C ලක්ෂ්‍යය, OA මත $OC = \frac{a}{2}$ වන පරිදි වේ. (OA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.)

c විස්තාරය, දෙනු ලබන සූත්‍රය $\dot{y}^2 = \omega^2 (c^2 - y^2)$

මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{a}$ වේ.

B හිදී, $y = \frac{5a}{2}$ වන විට $\dot{y} = 0$. (5)

$\therefore\ 0 = \omega^2\left(c^2 - \left(\frac{5a}{2}\right)^2\right) \Rightarrow c = \frac{5a}{2}$. (5)

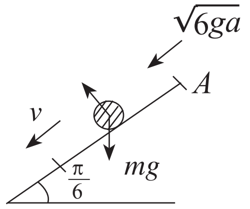
අංශුව, A ලක්ෂ්‍යය කරා ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය u යැයි ගනිමු.

A හිදී $y = \frac{a}{2}$, $u^2 = \frac{g}{a}\left(\left(\frac{5a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$. (5) + (5)

$\Rightarrow \quad u = \sqrt{6ga}$. (5) **35**

<u>A සිට O දක්වා P හි චලිතය</u>

මෙම චලිතය තලය මත ගුරුත්වය යටතේ වේ.



$v^2 = u^2 + 2fs$ යෙදීමෙන්

$\swarrow \quad v^2 = 6ga + 2\left(\frac{g}{2}\right).\, a$ (5)

$\therefore\ v^2 = 7ga$

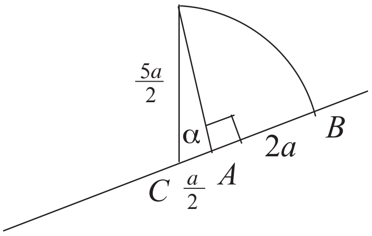
$\therefore\ v = \sqrt{7ga}$ (5) **10**

සරල අනුවර්තී චලිතය යටතේ B සිට A දක්වා P ගන්නා t_1 කාලය,

$\omega t_1 = \alpha .$ (5) දැන් $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{5a}{2}} = \dfrac{1}{5}$. (5)

$\therefore t_1 = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right).$ (5)

ඊළඟට, A සිට O දක්වා චලිතයට P ගන්නා t_2 කාලය,



$v = u + at$ යෙදීමෙන් (5)

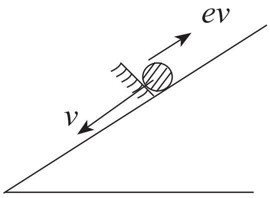
$\swarrow \ \sqrt{7ga} = \sqrt{6ga} + \dfrac{g}{2}\, t_2$

$\therefore t_2 = 2\sqrt{\dfrac{a}{g}}\,(\sqrt{7} - \sqrt{6})$ (5) $= 2k\sqrt{\dfrac{a}{g}}$, මෙහි $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

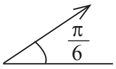
$\therefore$ B සිට O දක්වා ගතවන කාලය (5)

$t_1 + t_2 = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right)$, මෙහි $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

35



O හි සුමට බාධකය සමග ගැටීමට මොහොතකට පසුව P හි වේගය $ev = e\sqrt{7ga}$ (5)



$0 < z \le a$ වේ නම් අංශුවේ පසුව එන චලිතය සරල අනුවර්තී නොවේ; මෙහි z යනු ගුරුත්වය යටතේ, තලයේ ඉහළට චලනය වන දුර වේ. (10)

$v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්, (5)

$\nearrow \ 0 = (ev)^2 - 2\left(\frac{g}{2}\right)z$

$\Rightarrow z = 7e^2a$ (5)

දැන්, $0 < z \le a$

$\Leftrightarrow 0 < 7e^2a \le a$ (5)

$\Leftrightarrow 0 < e \le \dfrac{1}{\sqrt{7}}.$ (5)

35

---

14. (*a*) $OACB$ යනු සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි ද D යනු AC මත $AD : DC = 2 : 1$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. O අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\lambda\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ; මෙහි $\lambda > 0$ වේ. $\overrightarrow{OC}$ හා $\overrightarrow{BD}$ දෛශික, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා λ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

දැන්, $\overrightarrow{OC}$ යන්න $\overrightarrow{BD}$ ට ලම්බ වේ යැයි ගනිමු. $3|\mathbf{a}|^2\lambda^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ බව පෙන්වා $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ හා $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ නම්, λ හි අගය සොයන්න.

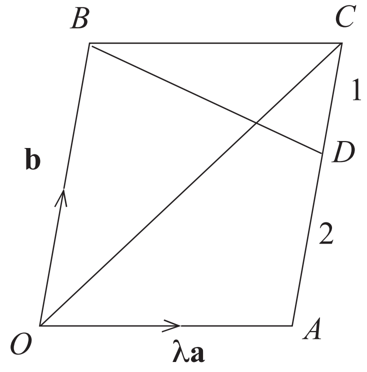
(*b*) කේන්ද්‍රය O හා පැත්තක දිග $2a$ වූ $ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයක තලයෙහි වූ බල තුනකින් පද්ධතියක් සමන්විත වේ. මූලය O හි ද Ox-අක්ෂය $\overrightarrow{OB}$ දිගේ ද Oy-අක්ෂය $\overrightarrow{OH}$ දිගේ ද ඇතිව බල හා ඒවායේ ක්‍රියා ලක්ෂ්‍ය, සුපුරුදු අංකනයෙන්, පහත වගුවේ දක්වා ඇත; මෙහි H යනු CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.
(P නිව්ටන වලින් ද a මීටර වලින් ද මනිනු ලැබේ.)

ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$a\mathbf{i} - \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
C	$a\mathbf{i} + \sqrt{3}a\mathbf{j}$	$-3P\mathbf{i} + \sqrt{3}P\mathbf{j}$
E	$-2a\mathbf{i}$	$-2\sqrt{3}P\mathbf{j}$

පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා, යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න.

දැන්, $\overrightarrow{FE}$ දිගේ ක්‍රියා කරන විශාලත්වය $6P$ N වූ අතිරේක බලයක් මෙම පද්ධතියට ඇතුළත් කරනු ලැබේ. නව පද්ධතිය ඌනනය වන තනි බලයේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

(*a*)



(5)

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OC} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (5)

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= \lambda\mathbf{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ (5)

$\overrightarrow{BD} = \lambda\mathbf{a} + -\frac{1}{3}\mathbf{b}$

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BD}$ ට බැවින් ඒවායේ අදිශ ගුණිතය $= 0$. (5)

$\Rightarrow (\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) \,.\, (\lambda\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}) = 0$

$\lambda^2|\mathbf{a}|^2 + (1 - \frac{1}{3})(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\lambda - \frac{1}{3}|\mathbf{b}|^2 = 0$ (5) $(\because \mathbf{b}\,.\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})$

$\Rightarrow 3\lambda^2|\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\lambda - |\mathbf{b}|^2 = 0$ (5)

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ හා $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\frac{\pi}{3}$ (5)

$= \frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2$

ඉහත සමීකරණයෙහි ආදේශයෙන්,

$$3|\mathbf{a}|^2\lambda^2 + 2\,.\,\frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2\lambda - |\mathbf{a}|^2 = 0$$ (5)

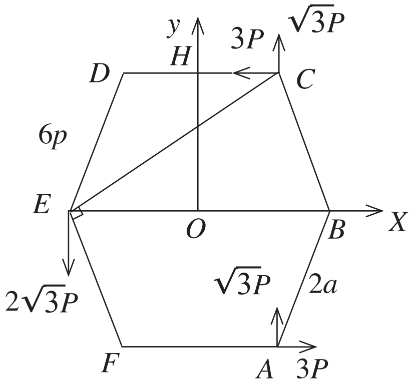
$$3\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$ (5)

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

$\lambda > 0$ බැවින් $\lambda = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$. (5)

50

(*b*)



ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික වන්නේ,

$\overrightarrow{OA} = a\mathbf{i} - \sqrt{3}\,a\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OC} = a\mathbf{i} + \sqrt{3}\,a\mathbf{j}$

$\overrightarrow{OE} = -2a\mathbf{i}$

රූපය සඳහා (15)

O හි දී පද්ධතිය ඌනනය කරමු.

$\rightarrow X = 3P - 3P = 0$ (10)

$\uparrow Y = \sqrt{3}P + \sqrt{3}P - 2\sqrt{3}P = 0$

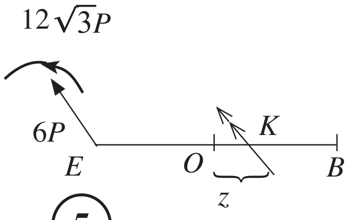
$M \neq 0$ වේ නම් පද්ධතිව යුග්මයකට තුල්‍ය වේ. (10)

$O \circlearrowleft\ 2\times 3P\,.\,a\sqrt{3}P + 2a\sqrt{3}P + (2a)\,.\,2\sqrt{3}P = M = 12a\sqrt{3}P \circlearrowleft$ (20)

යුග්මයේ ඝූර්ණය $(M \neq 0)$ හි විශාලත්වය $12a\sqrt{3}P$ Nm වන අතර එය වාමාවර්ත වේ. (5) + (5)

65

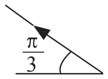
නව පද්ධතිය



(5)

විශාලත්වය $= 6P$ (5)

දිශාව =



(5)

$K \circlearrowleft \quad -6P\times(2a+z)\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 12a\sqrt{3}P = 0$ (10)

$\Rightarrow z = 2a$ (5)

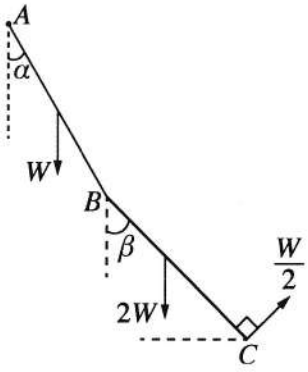
$\therefore$ නව පද්ධතිය $\overrightarrow{BC}$ දිගේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට තුල්‍ය වේ. (5)

35

---

15. (*a*) එක එකක දිග $2a$ වූ AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB දණ්ඩේ බර W ද BC දණ්ඩේ බර $2W$ ද වේ. A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. AB හා BC දඬු යටි අත් සිරස සමග පිළිවෙළින් α හා β කෝණ සාදමින් මෙම පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ, C හි දී රූපයේ පෙන්වා ඇති BC ට ලම්බ දිශාව ඔස්සේ යෙදූ $\frac{W}{2}$ බලයක් මගිනි. $\beta = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වා, B සන්ධියේ දී AB දණ්ඩ මගින් BC දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවෙහි තිරස් හා සිරස් සංරචක සොයන්න.

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ බවත් පෙන්වන්න.



(*b*) රූපයෙහි පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල ඒවායේ කෙළවරවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, BD, DC හා AC සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ.

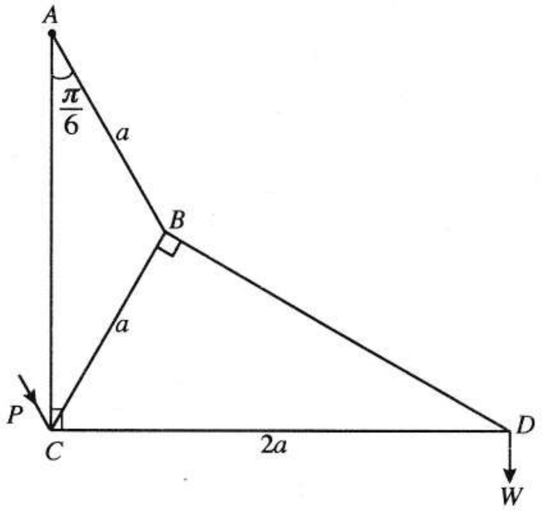
මෙහි $AB = CB = a$ ද $CD = 2a$ ද $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$ ද බව දී ඇත. රාමු සැකිල්ල A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. D සන්ධියේ දී W භාරයක් එල්ලා, AC සිරස්ව ද CD තිරස්ව ද ඇතිව සිරස් තලයක රාමු සැකිල්ල සමතුලිතව තබා ඇත්තේ C සන්ධියේ දී AB දණ්ඩට සමාන්තරව රූපයේ පෙන්වා ඇති දිශාවට යෙදූ P බලයක් මගිනි. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් D, B හා C සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්,

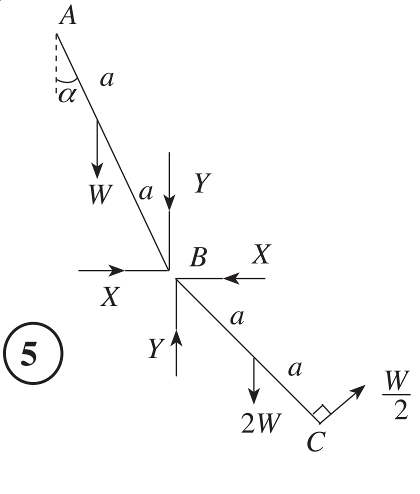
(i) ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් දඬු පහේම ප්‍රත්‍යාබල, හා

(ii) P හි අගය

සොයන්න.



(*a*)



(5)

BC සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$B \circlearrowright \ \frac{W}{2}(2a) = 2W.\, a \sin\beta$ (10)

$\Rightarrow \ \sin\beta = \frac{1}{2}. \ \therefore \ \beta = \frac{\pi}{6}.$ (5) + (5)

BC සඳහා

$\longleftarrow \ X = \frac{W}{2} . \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{4} W.$ (5)

$\uparrow$ BC සඳහා : $Y = 2W - \frac{W}{2}\sin\beta$ (5)

$= \frac{7}{4} W.$ (5)

40

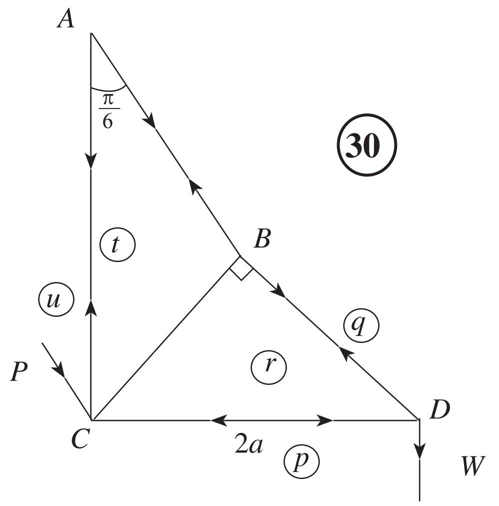
$A \curvearrowleft \quad X \,.\, 2a \cos\alpha - Y\, 2a \sin\alpha - W a \sin\alpha = 0$ (10)

$\Rightarrow \sqrt{3} \cos\alpha = 9 \sin\alpha .$ (5)

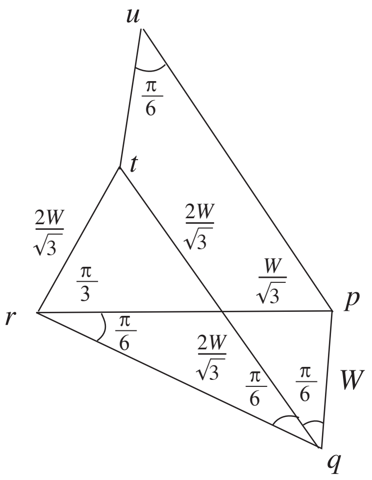
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9} .$ (5)

20

(*b*)



(30)



දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB	$\dfrac{4W}{\sqrt{3}}$	–
BC	$\dfrac{2W}{\sqrt{3}}$	–
AC	W	–
BD	$2W$	–
CD	–	$\sqrt{3}\ W$

(50)

$P = up = \dfrac{4W}{\sqrt{3}}$ (10)

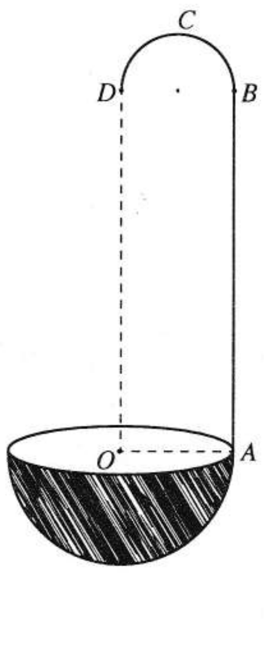
90

---

16. (i) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් ද

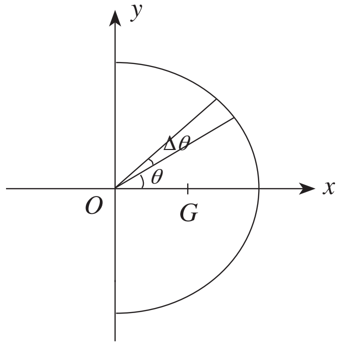
(ii) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොලක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.

කේන්ද්‍රය O හා අරය $2a$ වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොලකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දිග $2\pi a$ වූ AB ඍජු කොටසකින් ද BD විෂ්කම්භය AB ට ලම්බ වන පරිදි, අරය a වූ BCD අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසකින් ද සමන්විත ඒකාකාර කම්බියකින් සාදනු ලැබූ $ABCD$ තුනී මිටක් දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන් හැන්දක් සාදා ඇත. A ලක්ෂ්‍යය අර්ධ ගෝලයේ ගැට්ට මත ඇති අතර OA යන්න AB ට ලම්බ ද OD යන්න AB ට සමාන්තර ද වේ. තව ද BCD යන්න $OABD$ හි තලයේ පිහිටා ඇත. අර්ධ ගෝලයේ ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ ද මිටෙහි ඒකක දිගක ස්කන්ධය $\frac{a\sigma}{2}$ ද වේ. හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, OA සිට පහළට $\frac{2}{19\pi}\left(8\pi - 2\pi^2 - 1\right)a$ දුරකින් ද O හා D හරහා යන රේඛාවේ සිට $\frac{5}{19}a$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රළු තිරස් මේසයක් මත, අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය එය ස්පර්ශ කරමින්, හැන්ද තබා ඇත. අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{7}$ කි. $\overrightarrow{AO}$ දිශාවට A හි දී යොදනු ලබන තිරස් බලයක් මගින් OD සිරස්ව ඇතිව හැන්ද සමතුලිතතාවයේ තැබිය හැකි බව පෙන්වන්න.

(i)



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, Ox අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$, මෙහි ρ යනු, ඒකක දිගක ස්කන්ධය වේ.

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු. එවිට

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho a\cos\theta \, d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} a\rho \, d\theta} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{a\sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}{\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} \quad (5)$$

$$= \frac{2a}{\pi} \quad (5)$$

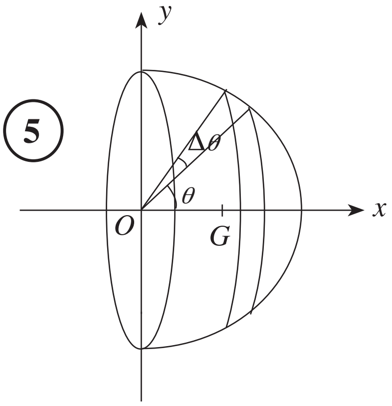
ඒ නයින්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් පිහිටයි.

25

(ii) සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, Ox අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$\Delta m = 2\pi\,(a\sin\theta)\,a\rho\theta.\sigma$ මෙහි σ යනු, ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය වේ.

$OG = \bar{x}$. යැයි ගනිමු. එවිට



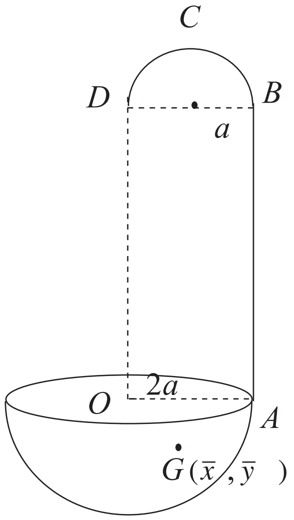
$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a\sin\theta)\, a\,\sigma\, a\cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a\sin\theta)\, a\,\sigma\, d\theta}$$ (5) + (5)

$$= \frac{\left.\dfrac{a\sin\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left.-\cos\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}$$ (5) + (5)

$$= \frac{a}{2}.$$ (5)

ඒ නයින්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් පිහිටයි.

30



වස්තුව	ස්කන්ධය	OD ($\rightarrow$) සිට දුර	OA ($\downarrow$) සිට දුර	
AB සෘජු කොටස	$\pi a^2 \sigma$ (5)	$2a$	πa	(5)
BCD අර්ධ වෘත්තාකාර කොටස	$\frac{\pi a^2 \sigma}{2}$ (5)	a	$2\pi a + \frac{2a}{\pi}$	(5)
අර්ධ ගෝලාකාර කබොළ	$8\pi a^2 \sigma$ (5)	0	$-a$	(5)
හැන්ද	$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}$ (5)	$\bar{x}$	$\bar{y}$	

$$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}\ \bar{y} = \pi a^2 \sigma . \pi a + \frac{\pi a^2 \sigma}{2}\left(2\pi a + \frac{2a}{\pi}\right) + 8\pi a^2 \sigma(-a) \quad (10)$$

$$\frac{19\pi}{2}\ \bar{y} = -8\pi a + 2\pi a + a \quad (5)$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{-2}{19\pi}\ (8\pi - 2\pi^2 - 1)a$$

$\therefore$ හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OA සිට $\frac{2}{19\pi}\ (8\pi - 2\pi^2 - 1)\ a$ දුරක් පහළින් පිහිටයි.

$$\frac{19\pi a^2 \sigma}{2}\ \bar{x} = \pi a^2 \sigma .\ 2a + \frac{\pi a^2 \sigma}{2}\ .\ a + 8\pi a^2 \sigma . 0 \quad (10)$$

$$\therefore \frac{19}{2}\bar{x} = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{5a}{19} \quad (5)$$

$\therefore$ හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OD සිට $\frac{5a}{19}$ දුරකින් පිහිටයි.

65

$\rightarrow \quad F = P$ (5)

$\uparrow \quad R = W$ (5)

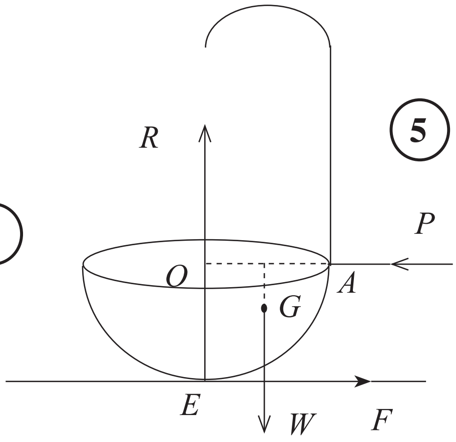
$E \curvearrowleft \quad P \times 2a = W \times \frac{5}{19} a$ (5)

$\therefore \; P = \frac{5}{38} W .$

$\Rightarrow \; F = \frac{5}{38} W .$

$\frac{F}{R} \quad \frac{5}{38}$ (5)

$\therefore \; \frac{1}{7} > \frac{F}{R}$ (5)



(5)

ඒ නයින්, හැන්ද සමතුලිතතාවේ තැබිය හැක.

30

17. (*a*) ආරම්භයේ දී එක එකක් සුදු පාට හෝ කළු පාට වූ, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සමාන බෝල 3 ක් පෙට්ටියක අඩංගු වේ. දැන්, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම පෙට්ටියේ ඇති බෝලවලට සමාන සුදු පාට බෝලයක් පෙට්ටිය තුළට දමා ඉන්පසු සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ.

පෙට්ටියේ ඇති බෝලවල ආරම්භක සංයුති හතර සම සේ භව්‍ය වේ යැයි උපකල්පනය කරමින්,

(i) ඉවතට ගත් බෝලය සුදු පාට එකක් වීමේ,

(ii) ඉවතට ගත් බෝලය සුදු පාට එකක් බව දී ඇති විට ආරම්භයේ දී පෙට්ටිය තුළ හරියටම කළු පාට බෝල 2 ක් තිබීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) μ හා σ යනු පිළිවෙළින් $\{x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ අගයන් කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය යැයි ගනිමු. $\{\alpha x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ අගයන් කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න; මෙහි α යනු නියතයකි.

එක්තරා සමාගමක සේවකයින් 50 දෙනකුගේ මාසික වැටුප් පහත වගුවේ සාරාංශගත කර ඇත:

මාසික වැටුප (රුපියල් දහසේ ඒවායින්)	සේවකයින් ගණන
5 – 15	9
15 – 25	11
25 – 35	14
35 – 45	10
45 – 55	6

සේවකයින් 50 දෙනාගේ මාසික වැටුප්වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

වසරක ආරම්භයේ දී එක් එක් සේවකයාගේ මාසික වැටුප $p\%$ වලින් වැඩි කරනු ලැබේ. ඉහත සේවකයින් 50 දෙනාගේ නව මාසික වැටුප්වල මධ්‍යන්‍යය රුපියල් 29 172 බව දී ඇත. p හි අගය හා සේවකයින් 50 දෙනාගේ නව මාසික වැටුප්වල සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

(*a*) $i = 0, 1, 2, 3$ සඳහා E_i යනු සුදුපාට බෝල i ගණනක් ඇති පෙට්ටියේ සංයුතිය යැයි ගනිමු.

එවිට $P(E_i) = \dfrac{1}{4}$, $i = 0, 1, 2, 3$ සඳහා

W යනු සසම්භාවී ලෙස ඉවතට ගත් බෝලය සුදුපාට වීමේ සිද්ධිය යැයි ගනිමු.

එවිට,

(i) $P(W) = \sum_{i=0}^{3} P(W \mid E_i)\, P(E_i)$ **(10)**

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{4} \times \dfrac{1}{4}$ **(10)**

$= \dfrac{5}{8}$ **(5)**

25

(ii) බේස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$P(E_1 \mid W) = \frac{P(W \mid E_1)\, P(E_1)}{P(W)}$$ **(10)**

$$= \frac{\frac{2}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{5} \quad (5)$$

25

(*b*) $Y = \{\alpha x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ යැයි ගනිමු.

මධ්‍යනාසය : $\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)}{n} = \alpha \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) = \alpha\mu$ (5) + (5)

විචලතාව : $\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2}{n} - \mu_y^2$ (5)

$$= \alpha^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \mu^2 \right] \quad (5)$$

$$= \alpha^2 \sigma^2 \quad (5)$$

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $\sigma_y = |\alpha| \sigma$ (5)

30

මාසික වැටුප (රුපියල් දහසේ ඒවායින්)	f	මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය x (5)	$y = \frac{1}{10}x$	y^2	fy (5)	fy^2 (5)
5 - 15	9	10	1	1	9	9
15 - 25	11	20	2	4	22	44
25 - 35	14	30	3	9	42	126
35 - 45	10	40	4	16	40	160
45 - 55	6	50	5	25	30	150
	50				$\sum fx = 143$ (5)	$\sum fx^2 = 489$ (5)

$\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{143}{50}$ (5) හා $\sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2 = \frac{489}{50} - \left(\frac{143}{50}\right)^2$ (5)

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{4001}}{50} \quad (5)$$

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් :

$\mu_x = 10\mu_y = 10\left(\frac{143}{50}\right)$ = 28.6 රුපියල් දහසේ ඒවා (5)

(= රු. 28600)

හා $\sigma_x = 10\sigma_y = \frac{\sqrt{4001}}{5}$ ≈ 12.65 රුපියල් දහසේ ඒවා (5)

(≈ රු. 12650)

50

නව මාසික වේතනය : $z = x + \frac{p}{100}\ x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x,$ මෙහි x යනු කලින් මාසික වේතනයයි.

(5)

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් : $\mu_z = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\mu_x$

$29172 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)28600$ (5)

$\Rightarrow \frac{29172}{286} = 100 + p \qquad \therefore\ p = 2$ (5)

$\sigma_z \approx \left(1 + \frac{2}{100}\right)\sigma_x$

$\approx \frac{51}{50} \times 12.65$ (5)

≈ 12.9 රුපියල් දහසේ ඒවා

(≈ රු. 12900)

20