ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුවේ ප්‍රකාශනයකි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 T I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

※ இவ்வினாத்தாள் பகுதி **A** (வினாக்கள் **1 - 10**), பகுதி **B** (வினாக்கள் **11 - 17**) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.

※ பகுதி **A**
எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

※ பகுதி **B**
ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.

※ ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** இன் விடைத்தாளானது **பகுதி B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.

※ வினாத்தாளின் **பகுதி B** ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர்: 1	
2	
மேற்பார்வை செய்தவர்	

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

1. காரணிப்படுத்துக : $x^2(y^3 - z^3) + y^2(z^3 - x^3) + z^2(x^3 - y^3)$.

2. $7a + b$ ஆனது 4 இனால் வகுபடுமெனின், aRb இனால் எல்லா நிறைவெண்களினதும் தொடையாகிய $\mathbb{Z}$ மீது ஒரு தொடர்பு R வரையறுக்கப்படுகின்றதெனக் கொள்வோம். R ஆனது $\mathbb{Z}$ மீது ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பெனக் காட்டி, 0 இன் சமவன்மை வகுப்பை எழுதுக.

0102

3. $x \in [0, 1]$ இற்கு $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ எனக் கொள்வோம். f ஒன்றுக்கொன்றானதெனக் காட்டுக.
$x \in [0, 1]$ இற்கு $f(f(x))$ ஐக் கண்டு, **இதிலிருந்து**, $f^{-1}(x)$ ஐக் காண்க.

4. $a, b, c \in \mathbb{R}$ எனக் கொள்வோம். $\begin{vmatrix} 1 & 1+a & bc \\ 1 & 1+b & ac \\ 1 & 1+c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ எனக் காட்டுக.

[பக். 4 ஐப் பார்க்க

5. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்குப் புள்ளி $(at_1^2, 2at_1)$ இல் உள்ள செவ்வனானது பரவளைவைப் புள்ளி $(at_2^2, 2at_2)$ இல் மறுபடியும் சந்திக்கின்றது.

$t_2 = -\left(t_1 + \frac{2}{t_1}\right)$ என நிறுவுக.

6. $a, b \in \mathbb{R}$ எனவும் $b \neq 0$ எனவும் கொள்வோம். மேலும் $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}; & x<0 \text{ இற்கு,} \\ \dfrac{1}{2}; & x=0 \text{ இற்கு,} \\ \dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x}; & x>0 \text{ இற்கு,} \end{cases}$

இனால் தரப்படும் சார்பு எனவும் கொள்வோம். f ஒரு தொடர் சார்பெனின், $a = -\frac{3}{2}$ எனவும் $b = 1$ எனவும் காட்டுக.

[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=\begin{cases} \ln x & ; \ 1 \leq x \text{ எனின்,} \\ x-1 & ; \ 0 < x < 1 \text{ எனின்,} \\ e^{-x}-2 & ; \ x \leq 0 \text{ எனின்,} \end{cases}$

இனால் வரையறுக்கப்படும் சார்பெனக் கொள்வோம்.

$x=1$ இல் f வகையிடப்படத்தக்கது எனவும் $x=0$ இல் f வகையிடப்படத்தக்கதன்று எனவும் காட்டுக.

$x \neq 0$ இற்கு $f'(x)$ ஐ எழுதுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ இற்கு வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\tan x \frac{dy}{dx} + 2y = 2\sin x$ ஐத் தீர்க்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. [0, 1] மீது f' தொடர்ச்சியானதாகவும் $f(1)=0$ ஆகவும் $\int_0^1 \{f(x)\}^2 \mathrm{d}x = 1$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக f ஒரு மெய்ப் பெறுமானமுள்ள சார்பெனக் கொள்வோம்.

$\int_0^1 x f(x) f'(x) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

10. ஒரே வரிப்படத்தில் $r = 2 + \cos\theta$, $r = 5\cos\theta$ ஆகியவற்றை முனைவுச் சமன்பாடுகளாகக் கொண்ட வளையிகளைப் பரும்படியாக வரைக. இவ்விரு வளையிகளினதும் வெட்டுப் புள்ளிகளைக் காண்க.

* *

[பக். 7 ஐப் பார்க்க

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023(2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023(2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023(2024)

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 T I

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (*a*) A, B, C ஆகியன ஓர் அகிலத் தொடை S இன் தொடைப்பிரிவுகளெனக் கொள்வோம். நீங்கள் பயன்படுத்தும் தொடை அட்சரகணித விதிகளைத் தெளிவாகக் குறிப்பிட்டு,

(i) $A \setminus (B' \setminus C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(ii) $A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = (A \cap (B \cup C)) \setminus (A \cap B \cap C)$,

எனக் காட்டுக.

(*b*) ஆங்கிலம், பிரெஞ்சு, ஜேர்மன் ஆகிய மூன்று மொழிகளில் குறைந்தபட்சம் ஒரு மொழியையேனும் பேசும் 42 நபர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவில்

(i) 10 நபர்கள் ஆங்கில மொழியை மாத்திரம் பேசுகின்றனர் எனவும்

(ii) 20 நபர்கள் பிரெஞ்சு மொழியைப் பேசுவதில்லை எனவும்

(iii) 23 நபர்கள் ஜேர்மன் மொழியைப் பேசுவதில்லை எனவும்

தரப்பட்டுள்ளது.

பிரெஞ்சு மொழி, ஜேர்மன் மொழி ஆகிய இரண்டையும் பேசுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

12. (*a*) $a, b, c \in \mathbb{R}$ எனவும் $a, b, c > 0$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ எனவும்

(ii) $\dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} \geq 6$ எனவும்

(iii) $a+b \geq c$ எனின், $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} \geq \dfrac{c}{1+c}$ எனவும்

காட்டுக.

(*b*) சில $u \in \mathbb{R}$ இற்கு $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக λ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் உருமாற்றத்தின் கீழ் அதன் மீதே படமாக்கப்படும் உற்பத்தியினூடாக உள்ள ஒரு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

13. (*a*) ஒரு நேர் நிறைவெண் சுட்டிக்குத் த **மோய்வரின் தேற்றத்தைக்** குறிப்பிட்டு, நிறுவுக.

$n \in \mathbb{Z}^+$ எனவும் $\theta \in \mathbb{R}$ ஆன $z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனவும் கொள்வோம்.

$\dfrac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$ என **உய்த்தறிந்து,** $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $32\cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10$ எனக் காட்டுக.

$32\sin^6\theta = -\cos 6\theta + 6\cos 4\theta - 15\cos 2\theta + 10$ என **உய்த்தறிக.**

(i) θ இற்குச் சமன்பாடு $2\cos 6\theta - 12\cos 4\theta + 30\cos 2\theta = 19$ ஐத் தீர்க்க.

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6\theta\, d\theta = k\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^6\theta\, d\theta$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $k(\in \mathbb{R})$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

14. (*a*) C_1 ஆனது $y = \dfrac{2x^2}{x^2+4}$ இனால் தரப்படும் வளையி எனக் கொள்வோம். வளையி C_1 ஐப் பருமட்டாக வரைக.

C_2 ஆனது $y = -2x^2 + 9$ இனால் தரப்படும் வளையி எனவும் கொள்வோம்.

C_1, C_2 ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் S ஐப் பருமட்டாக வரைந்து, பிரதேசம் S ஐ y-அச்சுப் பற்றி π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(*b*) வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y-3}{2x+y-3}$ ஐக் கருதுக.

k, h ஆகியவற்றைக் கண்டு, $x = X + h$, $y = Y + k$ ஆகிய பிரதியீடுகளைப் பயன்படுத்தி மேற்குறித்த வகையீட்டுச் சமன்பாடு

$\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{X+2Y}{2X+Y}$ ஆக உருமாற்றப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

இப்போது, பிரதியீடு $Y = VX$ ஐப் பயன்படுத்தி இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

15. (*a*) $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ இற்கும் $a > 1$ இற்கும் $I_n = \displaystyle\int_1^e 2x(\ln(ax))^n\, dx$ எனக் கொள்வோம்.

$I_n = e^2(1 + \ln(a))^n - \ln(a)^n - \dfrac{n}{2a} I_{n-1}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\displaystyle\int_1^e 2x(1+\ln(x))^2\, dx$ ஐப் பெறுமானங்கணிக்க.

(*b*) $x \neq 1$ ஆக இருக்கும்போது $f(x) = (1-x)^2\ln(1-x)$ எனக் கொள்வோம்.

$f'(x) + f''(x) + \dfrac{1}{2}(1-x)x f'''(x) - 2 = 2x\ln(1-x)$ எனக் காட்டுக.

$f(x)$ இன் மக்குளோரின் தொடரை x இன் ஏறு வலுக்களில் x^4 இடம்பெறும் உறுப்பு (உட்பட) வரைக்கும் காண்க.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

16. $a, b > 0$ ஆகவும் $\theta \in \mathbb{R}$ ஆகவும் இருக்கும்போது $P \equiv (a\cos\theta, b\sin\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

புள்ளி P இல் $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வளையத்திற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலியினதும் செவ்வனினதும் சமன்பாடுகள் முறையே $b\cos\theta x + a\sin\theta y = ab$, $a\sin\theta x - b\cos\theta y = (a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta$ எனக் காட்டுக.

இப்போது $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ எனக் கொள்வோம். மேற்குறித்த தொடலியானது x-அச்சையும் y-அச்சையும் சந்திக்கும் புள்ளிகள் முறையே L, M எனவும் கொள்வோம். LM இன் நடுப்புள்ளியானது வளையி $b^2x^2 + a^2y^2 = 4x^2y^2$ மீது உள்ளதெனக் காட்டுக.

அடுத்ததாக மேற்குறித்த செவ்வனானது x-அச்சையும் y-அச்சையும் சந்திக்கும் புள்ளிகள் முறையே R, S எனவும் கொள்வோம். முக்கோணி ORS இன் உயர்ந்தபட்சப் பரப்பளவைக் காண்க.

17. (*a*) $x \neq n\pi, (4n \pm 1)\dfrac{\pi}{2}$ இற்கு $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{\tan x + \cot x}\right)^2 - \dfrac{2}{\operatorname{cosec}^2 x}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $n \in \mathbb{Z}$.

$x \in \mathbb{R}$ இற்கு $g(x) = \sin 2x + \cos 2x$ எனவும் கொள்வோம்.

$n \in \mathbb{Z}$ ஆன $x \neq n\pi$, $(4n \pm 1)\dfrac{\pi}{2}$ இற்கு $f(x) = g(x)$ எனக் காட்டுக.

$g(x)$ ஐ வடிவம் $R\sin(\alpha x + \theta)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $R, \alpha > 0$ உம் $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ இற்கு $y = f(x)$, $y = \dfrac{1}{f(x)}$ என்னும் வரைபுகளைப் பருமட்டாக வரைக.

(*b*) பின்வரும் அட்டவணையின் மூலம் x இன் பெறுமானம் 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே இருக்கும்போது $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{1+x^2}$ இன் பெறுமானம் இரு தசம தானங்களுக்குச் சரியாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

x	0	0.25	0.50	0.75	1
$f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{1+x^2}$	0.00	0.38	0.55	0.59	0.55

சிம்சனின் நெறியைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{1+x^2}\,dx$ இன் ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(2+4x)}{1+x^2}\,dx$ இன் ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானம் 1.01 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\pi\ln(2)$ இற்கு ஓர் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

* * *

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023(2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023(2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023(2024)

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 T II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

- இவ்வினாத்தாள் **பகுதி A** (வினாக்கள் 1 - 10), **பகுதி B** (வினாக்கள் 11 - 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
- **பகுதி A :**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- **பகுதி B :**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** இன் விடைத்தாளானது **பகுதி B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் **பகுதி B** ஐ மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

- புள்ளிவிவர அட்டவணைகள் வழங்கப்படும்.
- g புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிக்கின்றது.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(11) உயர் கணிதம் II

பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்		
பரிசீலித்தவர்:	1	
	2	
மேற்பார்வை செய்தவர்		

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

பகுதி A

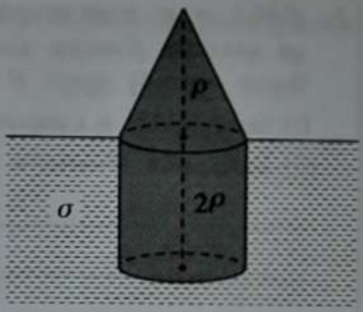
1. விசை $\mathbf{F} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ இன் உற்பத்தி பற்றிய திருப்பம் $\mathbf{M} = 20\mathbf{i} + 27\mathbf{j} - 34\mathbf{k}$ ஆகும். விசை $\mathbf{F}$ ஆனது புள்ளி $A \equiv (x, 4, z)$ இனூடாகச் செல்கின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. x, z ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

2. O ஆனது உற்பத்தி எனவும் $A \equiv (2, 1, 5), B \equiv (4, 4, 3), C \equiv (2, 7, 5)$ எனவும் கொள்வோம். $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ஐக் கண்டு, **இதிலிருந்து,** முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவைக் காண்க.

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

0102

3. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு அடர்த்தி ρ ஐயும் ஆரை a ஐயும் உயரம் a ஐயும் கொண்ட ஒரு சீரான செவ்வட்டக் கூம்பை அடர்த்தி 2ρ ஐயும் ஆரை a ஐயும் உயரம் a ஐயும் உடைய ஒரு சீரான செவ்வட்ட உருளை மீது விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு திண்மப் பொருள் செய்யப்பட்டுள்ளது. அது அடர்த்தி σ ஐ உடைய ஓர் ஏகவினத் திரவத்தில் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்க உருளை மாத்திரம் முற்றாக அமிழ்ந்து மிதக்கின்றது. $7\rho = 3\sigma$ எனக் காட்டுக.



4. நேரம் t இல் ஒரு துணிக்கை P இன் தானக் காவி $\mathbf{r} = 2\cot\,\mathbf{i} - 3\sin t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ இனால் தரப்படுகின்றது. $t = 0$ இல் P இன் வேகத்தைக் காண்க.

$t = \frac{\pi}{2}$ இல் P இன் கதி $\sqrt{\pi^2 + 4}$ எனக் காட்டுக.

P இன் ஆர்முடுகல் z-அச்சுடன் ஆக்கும் கோணம் $\alpha\,(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ எனக் கொள்வோம். $\alpha = \tan^{-1}(2)$ எனக் காட்டுக.

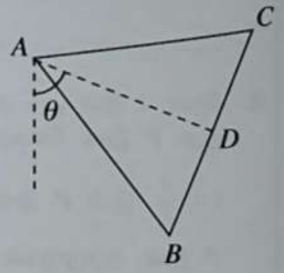
[பக். 4 ஐப் பார்க்க

5. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது xy-தளத்தில் இயங்கி y-அச்சின் வழியே இருக்கும் ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த நிலைக்குத்துச் சுவருடன் மோதுகின்றது. மொத்தலுக்குச் சற்று முன்னர் P இன் வேகம் $-6\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ ஆகும். P இற்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும்.

(i) மொத்தலுக்கு உடனடியாகப் பின்னர் P இன் கதியைக் காண்க.

(ii) மொத்தலின் விளைவாக இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியில் உள்ள இழப்பைக் காண்க.

6. ஒவ்வொன்றும் நீளம் $6a$ ஐ உடைய AB, BC, CA என்னும் மூன்று சீரான கோல்களை அவற்றின் முனைகளில் விறைப்பாக மூட்டுவதன் மூலம் ஒரு முக்கோணிச் சட்டம் ABC ஆக்கப்பட்டுள்ளது. A இனூடாகச் சட்டத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த கிடை அச்சு l ஐப் பற்றிச் சட்டம் சுழலத்தக்கது. சட்டத்தின் திணிவு M எனவும் அச்சு l பற்றிச் சட்டத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் $18Ma^2$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. BC இன் நடுப் புள்ளி D ஆகும். AD கிடையாக இருக்கச் சட்டம் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. AD ஆனது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ ஐ ஆக்கும்போது $3a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$ எனக் காட்டுக (உருவைப் பார்க்க).



[பக். 5 ஐப் பார்க்க

7. ஒரு பாடசாலையில் உள்ள மாணவர்களில் 80% ஆனோர் பேருந்தில் வருகின்றனரெனத் தரப்பட்டுள்ளது. எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட மூன்று மாணவர்களில்
(i) எந்த மாணவனும் பேருந்தில் வராமைக்கான,
(ii) இரண்டிலும் குறைவான மாணவர்கள் பேருந்தில் வருகின்றமைக்கான
நிகழ்தகவைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. ஓர் ஐந்து நிமிட ஆயிடையில் ஒரு பேருந்துத் தரிப்பிடத்திற்கு வரும் பயணிகளின் எண்ணிக்கை X ஆனது நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு $P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ உடனான ஒரு புவசோன் பரம்பலைப் பின்பற்றுகின்றது; இங்கு $\lambda (>0)$ ஒரு பரமானம். $P(X=2) = 2P(X=1)$ எனின், λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ஓர் ஐந்து நிமிட ஆயிடையில் உயர்ந்தபட்சம் ஒரு பயணி வந்துள்ளாரெனத் தரப்பட்டிருப்பின், செப்பமாக ஒரு பயணி மாத்திரம் வந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

9. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x)=\begin{cases} k\left(5-\frac{2x}{k}\right) & , \quad 0\le x\le 1 \text{ எனின்,} \\ 0 & , \quad \text{வேறு விதமாக,} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது; இங்கு k ஒரு நேர் மாறிலி. k இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, X இன் இடை $\frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

X இன் மாறற்றிறன் $\frac{1}{18}$ எனத் தரப்படும்போது $E(X^2)$ ஐக் காண்க.

10. ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு பின்வருமாறு.

x	0	1	3	4
$P(X=x)$	0.5	0.3	0.1	0.1

X இன் எதிர்பார்த்த பெறுமானத்தையும் X இன் மாறற்றிறனையும் காண்க.

$Y=aX+b$ இனால் வரையறுக்கப்படும் எழுமாற்று மாறி Y இன் இடையும் மாறற்றிறனும் முறையே $5, 7.2$ எனின், $a(>0), b$ ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

* *

[பக். 7 ஐப் பார்க்க

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 T II

பகுதி B

※ **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (*a*) ஓர் உற்பத்தி O தொடர்பாக P, Q ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+a\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ ஆகும். விசை $\mathbf{F}=b\mathbf{i}-4\mathbf{j}+18\mathbf{k}$ ஆனது P இல் தாக்கும் அதே வேளை Q பற்றி அதன் திருப்பம் $-14\mathbf{i}+6\mathbf{j}-c\mathbf{k}$ ஆகும். a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

ஒரு விசை $2\mathbf{F}$ ஆனது Q இல் தாக்குகின்றதெனத் தரப்பட்டிருக்கும்போது இவ்விரு விசைகளினதும் விளையுளின் தாக்கக் கோடானது கோடு PQ ஐ இடைவெட்டும் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க.

(*b*) ஒரு விறைத்த பொருளின் மீது தாக்கும் $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}, -2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ என்னும் விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் தானக் காவி $-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ஆகவுள்ள புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றன. அதே பொருளின் மீது தாக்கும் ஒரு மூன்றாம் விசை $\mathbf{F}$ இத்தொகுதியை ஓர் இணையாக ஒடுக்குகின்றது. $\mathbf{F}$ ஐக் காண்க.

இணையின் திருப்பம் $-\mathbf{i}-5\mathbf{j}-19\mathbf{k}$ எனவும் விசை $\mathbf{F}$ ஆனது தானக் காவி $a\mathbf{i}-b\mathbf{j}$ ஐ உடைய புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றது எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

12. ஆரை a ஐ உடைய ஒரு வட்ட அடர் ஓர் ஏகவினத் திரவத்தில், அதன் மையம் திரவத்தின் சுயாதீன மேற்பரப்பிற்குக் கீழே ஓர் ஆழம் $h(\geq a)$ இல் இருக்குமாறு, அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அடரின் அமுக்க மையமானது அதன் நிலைக்குத்து விட்டத்தின் மீது மையத்திற்குக் கீழே தூரம் $\dfrac{a^2}{4h}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

இப்போது $h=a$ எனக் கொள்வோம். அடர் அதன் மிகவும் தாழ்ந்த புள்ளி A பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுழற்றப்படுகின்றது. A இலிருந்து அடரின் அமுக்க மையத்திற்கு உள்ள தூரம் d ஆனது $\dfrac{3a}{4} \leq d \leq \dfrac{13a}{12}$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

13. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை வேகம் v ஆக இருக்கும்போது தடை mkv ஐ அளிக்கும் ஓர் ஊடகத்தில் நேரம் $t=0$ இல் வேகம் u உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. இங்கு $k(>0)$ ஒரு மாறிலியாகும்.

$\dfrac{dv}{dt}=-(g+kv)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $v=\left(\dfrac{g}{k}+u\right)e^{-kt}-\dfrac{g}{k}$ எனக் காட்டுக.

மேலும், நேரம் t இல் துணிக்கை உயர்ந்தபட்ச உயரத்தை அடையும்போது இடப்பெயர்ச்சி x எனின், $x=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{g}{k}+u\right)\left(1-e^{-kt}\right)-\dfrac{gt}{k}$ எனக் காட்டுக.

$\dfrac{dv}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}$ ஐப் பயன்படுத்தி, துணிக்கை அதன் தொடக்கத் தானத்திலிருந்து அடையும் உயர்ந்தபட்ச உயரம் H எனின், $H=\dfrac{u}{k}-\dfrac{g}{k^2}\ln\left(1+\dfrac{ku}{g}\right)$ எனக் காட்டுக.

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

14. திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான கோளம் A ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஓய்வில் உள்ளது. A இன் ஆரைக்குச் சமமான ஆரை உள்ளதும் திணிவு $2m$ ஐ உடையதும் கதி u உடன் மேசை மீது ஒரு நேர்கோட்டின் வழியே செல்வதுமான வேறோர் ஒப்பமான கோளம் B ஆனது A உடன் மோதுகின்றது. மோதுகைக்குச் சற்று முன்னர் B இன் வேகம் இரு கோளங்களினதும் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் கோணம் $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$ ஐ ஆக்குகின்றது. கோளங்களுக்கிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $e\left(\frac{1}{2}<e\leq 1\right)$ ஆகும்.

மோதுகைக்குச் சற்றுப் பின்னர் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்களைக் காண்க.

மோதுகை காரணமாக B இன் இயக்கத் திசை திரும்புக் கோணமும் α ஆகுமெனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$\tan\alpha=\frac{1}{3}(2e-1)$ எனக் காட்டுக.

மோதுகை காரணமாக இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியின் இழப்பை m, e, u ஆகியவற்றிற் காண்க.

15. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m ஐயும் நீளம் $2a$ ஐயும் உடைய AB, BC, CD, DA என்னும் நான்கு சீரான கோல்களையும் திணிவு $4m$ ஐ உடைய ஓர் ஐந்தாவது சீரான கோல் BD ஐயும் ஒரு விறைப்பான சதுரச் சட்டம் $ABCD$ கொண்டுள்ளது. A இனூடாகச் சட்டத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் அச்சுப் பற்றிச் சட்டத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் $24ma^2$ எனக் காட்டுக.

A இனூடாக அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான கிடை அச்சைப் பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சட்டம் சுழலத்தக்கது. தொடக்கத்தில் A இற்குக் கீழே C அமைய AC நிலைக்குத்தாக இருக்கும்போது B ஐ மேல்நோக்கி இயங்கச் செய்யும் போக்கில் சட்டத்திற்குக் கோணக் கதி $\sqrt{\frac{3g}{a}}$ கொடுக்கப்படுகின்றது. நேரம் t இல் AC ஆனது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஒரு கோணம் θ ஐ ஆக்குகின்றது.

$a\dot{\theta}^2=\frac{1}{3}g\left(9-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cos\theta\right)$ எனக் காட்டுக.

AB ஆனது முதன்முதலாகக் கிடையாக இருக்கும் கணத்தில் C இன் கதியைக் காண்க.

சட்டம் முழுமையான சுழற்சிகளை ஆக்குமெனக் காட்டுக.

16. p ஆனது $0\leq p\leq 1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள ஒரு மெய்யெண் எனக் கொள்வோம். $x=0, 1, 2, \ldots,$ இற்கு $p(x)=(1-p)^x p$ ஆனது ஒரு நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பை வரையறுக்கின்றதெனக் காட்டுக.

ஓர் எழுமாற்று முயற்சியில் ஒரு பிள்ளை ஒரு கணினி விளையாட்டில் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு p ஆகும். முதல் தடவை வெல்வதற்கு முன்பாக அப்பிள்ளை மேற்கொள்ள வேண்டிய முயற்சிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை X இன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பு $P(X=x)=(1-p)^x p, x=0, 1, 2, \ldots$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அப்பிள்ளை மூன்றிலும் குறைந்த முயற்சிகளில் முதல் தடவை வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{7}{16}$ இற்குச் சமமென அறியப்படுகின்றது.

(i) p இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) பிள்ளை

(*a*) மூன்றாவது முயற்சியில் முதல் தடவை வெல்வதற்கான,

(*b*) முதல் தடவை வெல்வதற்கு மூன்றுக்கு மேற்பட்ட முயற்சிகளை மேற்கொள்வதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iii) பிள்ளை மூன்றிலும் குறைந்த முயற்சிகளில் முதல் தடவை வெல்கின்றதெனத் தரப்படும்போது பிள்ளை இரண்டாவது முயற்சியில் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iv) முதல் தடவை வெல்வதற்குப் பிள்ளை மேற்கொள்ள வேண்டிய முயற்சிகளின் எதிர்பார்த்த எண்ணிக்கையைக் காண்க.

[பக். 9 ஐப் பார்க்க

17. (*a*) ஒரு குறித்த வகைக் கணினிப் பற்றரிகளின் (மாதங்களிலான) ஆயுட்காலம் X இனால் தரப்படும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ உடன் ஒரு பரம்பலைப் பின்பற்றுகின்றது; இங்கு $\lambda\,(> 0)$ ஒரு பரமானம்.

பற்றரிகளில் 84% ஆனவை 24 மாதங்களுக்கு முன்பாகத் தவறுமெனின், 12 மாதங்களுக்கு முன்பாகத் தவறும் பற்றரிகளின் சதவீதத்தைக் காண்க.

ஓர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த பற்றரி 12 மாதங்களுக்கு மேற்பட்ட காலத்திற்கு நீடித்திருப்பின், அப்பற்றரி 24 மாதங்களைக் கடக்கும் வரைக்கும் தொழிற்படும் நிலைமையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) ஒரு வகைப் பழக் கேக்கில் உள்ள முந்திரிகை வற்றல்களின் நிறை ஓர் இடை 50.2 கிராமுடனும் ஒரு நியம விலகல் 5 கிராமுடனும் ஒரு செவ்வன் பரம்பலைப் பின்பற்றுகின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. ஓர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட பழக் கேக்கில் உள்ள முந்திரிகை வற்றல்களின் நிறை 48 கிராமிலும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

மூன்று பழக் கேக்குகள் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டால், அவை ஒவ்வொன்றினதும் முந்திரிகை வற்றல்களின் நிறை 48 கிராமிலும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

* * *