සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි.

රහස්‍ය ලේඛනයකි.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2024

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
ප්‍රධාන/ සහකාර පරීක්ෂක රැස්වීමේ දී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2024

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

II පත්‍රය

A කොටස	10 x 25	=	250
B කොටස	05 x 150	=	750

එකතුව $= \frac{1000}{10}$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණු = 100

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.

   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) .... √ △ $\frac{4}{5}$

....

....

(ii) .... √ △ $\frac{3}{5}$

....

....

(iii) .... √ △ $\frac{3}{5}$

....

....

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = □ $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණු ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න.

***

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $7^n - 1$ යන්න 6 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා $7^n - 1 = 7 - 1 = 6$ හා එය 6 න් බෙදේ.

$\therefore$ $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන, ප්‍රතිඵලය $n = k$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $7^k - 1$ යන්න 6 න් බෙදේ. (5)

$\therefore$ $7^k - 1 = 6p$ වන පරිදි $p \in \mathbb{Z}^+$ පවතී. (5)

දැන්, $7^{k+1} - 1 = 7.7^k - 1$

$= 7(6p + 1) - 1$

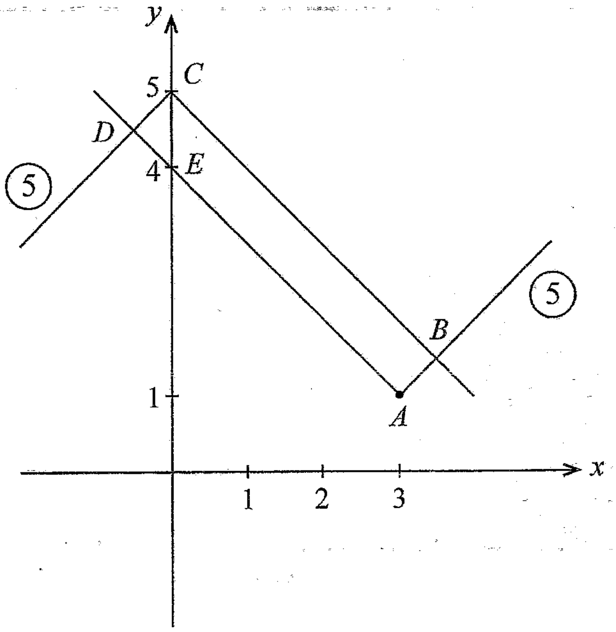
$= 42p + 6$

$= 6(7p + 1)$, හා මෙය 6 න් බෙදේ. (5)

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = k + 1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව සාධනය කර ඇත.

ඒ නයින්, ගණිතමය අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් ප්‍රතිඵලය සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහාම සත්‍ය වේ. (5)

2. එකම රූප සටහනක $y=|x-3|+1$ හා $y=5-|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
එනයින්, මෙම ප්‍රස්තාරවලින් ආවෘත වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.



$$CD = 1\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$AD = DE + EA = 1\sin 45^\circ + \sqrt{3^2+3^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \quad (5)$$

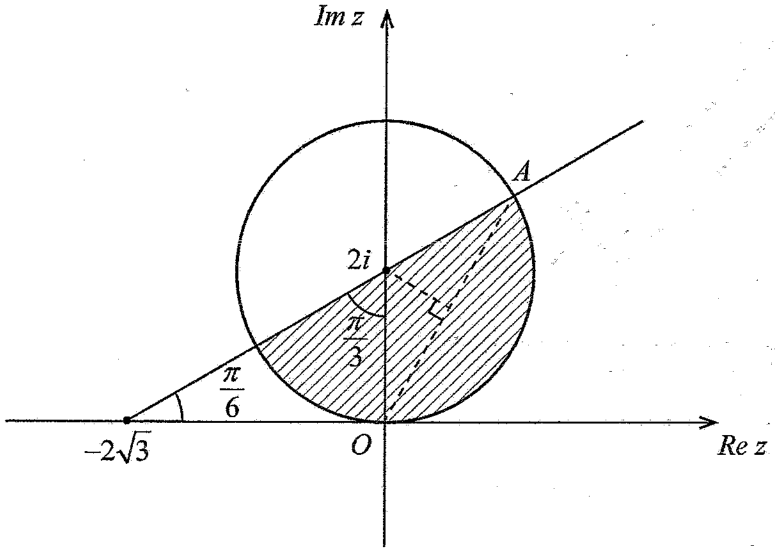
$$= \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= CD \cdot AD$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{7}{2}$$ වර්ග ඒකක. (5)

3. $|z-2i|\leq 2$ හා $0\leq \text{Arg}\left(z+2\sqrt{3}\right)\leq \frac{\pi}{6}$ යන අසමානතා සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස ආගන්ඩ් සටහනක අඳුරු කරන්න.
මෙම අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය කරනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා $|z|$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.



අර්ධ රේඛාව (5)

O හිදී x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තය (5)

නිවැරදි පෙදෙස අඳුරු කිරීම (5)

$|z|$ හි අවශ්‍ය වැඩිතම අගය $= OA$ (5)

$= 2\times 2\sin\frac{\pi}{3}$

$= 2\sqrt{3}$ (5)

4. $\left(1+x^3\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ ප්‍රසාරණයෙහි නියත පදය 93 බව පෙන්වන්න.

$\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ සාධාරණ පදය $= {}^9C_r x^r\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{9-r}$ (5)

$= {}^9C_r x^r \cdot x^{\left(\frac{r}{2}-\frac{9}{2}\right)}$

$= {}^9C_r\, x^{\left(\frac{3r}{2}-\frac{9}{2}\right)}$ (5)

$\therefore$ $\left(1+x^3\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ හි ප්‍රසාරණයේ නියත පද ලැබෙන්නේ $\dfrac{3r}{2}-\dfrac{9}{2}=0$ විට හා $\dfrac{3r}{2}-\dfrac{9}{2}=-3$ වන විට ය. (5)

එනම් $r=3$ විට හා $r=1$ විට.

$\therefore$ අවශ්‍ය නියත පදය $= {}^9C_1 + {}^9C_3$ (5)

$= \dfrac{9!}{8!} + \dfrac{9!}{3!\,6!}$

$= 9 + \dfrac{9\times 8\times 7}{2\times 3}$

$= 9 + 84$

$= 93.$ (5)

5. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2}\sin\left(\sqrt{x}-2\right)=\dfrac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2}\sin\left(\sqrt{x}-2\right)$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2} \bullet \frac{\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{\left(\sqrt{x-3}+1\right)} \bullet \sin\left(\sqrt{x}-2\right) \quad (5)$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)^2\left(\sqrt{x-3}+1\right)} \bullet \sin\left(\sqrt{x}-2\right)$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)} \bullet \frac{\sin\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{4}+2\right)\left(\sqrt{1}+1\right)} \bullet 1 \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{1}{8}. \quad (5)$$

6. $y=\dfrac{2}{x\sqrt[4]{4-x^2}}$, $y=0, x=1$ හා $x=\sqrt{2}$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස x-අක්ෂය වටා 2π රේඩියනවලින් භ්‍රමණය කරනු ලබයි. මෙලෙස ජනනය කරනු ලබන ඝන වස්තුවෙහි පරිමාව $\pi\left(\sqrt{3}-1\right)$ බව පෙන්වන්න.

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} y^2 \mathrm{d}x$ (5)

$= \pi\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$ $x = 2\sin t$ යැයි ගනිමු. එවිට $\mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$ වේ.

$= \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$ (5)

$= \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 t\cdot 2\cos t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$

$= \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{cosec}^2 t\,\mathrm{d}t$ (5)

$= \pi(-\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$ (5)

$= \pi\left(-\cot\dfrac{\pi}{4}+\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \pi\left(\sqrt{3}-1\right).$ (5)

7. C යනු $t > 0$ සඳහා $x = \ln t$ හා $y = e^t + t\ln t$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන වක්‍රය යැයි ගනිමු.
$\frac{dy}{dx} = t(e^t + \ln t + 1)$ බව පෙන්වන්න.
C වක්‍රයට $t = 1$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය $(1, a)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරයි නම්, $a = 1 + 2e$ බව පෙන්වන්න.

$t > 0$ සඳහා $x = \ln t$ හා $y = e^t + t\ln t.$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ හා $\frac{dy}{dt} = e^t + \ln t + t\cdot\frac{1}{t}$ (5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t + \ln t + 1)}{\frac{1}{t}}$$

$$= t(e^t + \ln t + 1).$$ (5)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = e + \ln 1 + 1 = e + 1.$$ (5)

$t = 1$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍ය $(0, e)$ වේ. (5)

$\therefore \frac{a - e}{1 - 0} = e + 1$

$\therefore a = 1 + 2e.$ (5)

8. මූල ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට ලම්බ දුර 1 ක් වන, $A \equiv (-1, 2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

$A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ ඕනෑම රේඛාවක සමීකරණය $a(x+1) + b(y-2) = 0$ ආකාරයෙන් වේ; මෙහි $a^2 + b^2 \neq 0$ වූ $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. (5)

දත්තයෙන්: $\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$ (5)

$\Leftrightarrow \quad (a-2b)^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \quad 4ab - 3b^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad b(4a-3b) = 0$

$\Leftrightarrow \quad b = 0 \quad \text{or} \quad a = \dfrac{3b}{4}$ (5)

අවශ්‍ය සමීකරණ $a(x+1) = 0$ හෝ $\dfrac{3b}{4}(x+1) + b(y-2) = 0$ වේ.

එනම්, $x = -1$ හෝ $3x + 4y - 5 = 0$.
(5) (5)

විකල්ප ක්‍රමය

$x = -1$ යනු $A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ එක් රේඛාවකි. (5)

$A \equiv (-1, 2)$ හරහා වූ වෙනත් ඕනෑම රේඛාවක් $y = mx + c$ යැයි ගනිමු.

එවිට $2 = m(-1) + c$ හා එනම් $c = m + 2$ වේ.

$\therefore \; y = mx + m + 2.$ (5)

දත්තයෙන්: $\dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$ (5)

$\Leftrightarrow \quad (m+2)^2 = m^2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad 4m + 4 = 1$

$\Leftrightarrow \quad m = -\dfrac{3}{4}.$ (5)

අනෙක් රේඛාව $y = \dfrac{3}{4}x \;\; \dfrac{3}{4} \;\; 2$ මගින් දෙනු ලැබේ.

එනම් $3x + 4y - 5 = 0.$ (5)

9. $A \equiv (-1, 1)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු. AB විෂ්කම්භයක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න. $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ වෘත්තය, S වෘත්තය B හි දී අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

S හි සමීකරණය

$$(x+1)(x-3) + (y-1)(y-3) = 0. \quad (5)$$

C_1 යනු S හි කේන්ද්‍රය යැයි ගනිමු.

එවිට $C_1 \equiv (1, 2)$.
එහි අරය $r_1 = \sqrt{5}$ } (5)

C_2 යනු $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ හි කේන්ද්‍රය යැයි ගනිමු.

එවිට $C_2 \equiv (2, \frac{5}{2})$.

එහි අරය $r_2 = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 9} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. } (5)

දැන්, $C_1C_2 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore\ C_1C_2 = r_1 - r_2$. (5)

දෙවන වෘත්තය මත B පිහිටන බව සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා (5)

$\therefore\ x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ වෘත්තය S වෘත්තය B හිදී අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරයි.

10. $\dfrac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\sin\theta}\equiv 4\operatorname{cosec} 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $\dfrac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\sin\theta}=8\cos 2\theta$ විසඳන්න.

$$\frac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}$$

$$=\frac{[(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)]\cot\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\cot\theta}{\cos^2\theta}$$ (5)

$$=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=4\operatorname{cosec}2\theta.$$ (5)

$$\frac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}=8\cos 2\theta$$

$$4\operatorname{cosec}2\theta=8\cos 2\theta$$ (5)

$$2\cos 2\theta\sin 2\theta=1$$

$$\sin 4\theta=1$$ (5)

$$\sin 4\theta=\sin\frac{\pi}{2}$$

$\therefore 4\theta=n\pi \quad (+1)^n\dfrac{\pi}{2};$ මෙහි $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore \theta=\dfrac{n\pi}{4} \quad (+1)^n\dfrac{\pi}{8},;$ මෙහි $n\in\mathbb{Z}$. (5)

11. (*a*) $f(x)=x^2+2x+c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $c\in\mathbb{R}$ වේ.

$f(x)=0$ යන සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව දී ඇත. $c<1$ බව පෙන්වන්න.

α හා β යනු $f(x)=0$ හි මූල යැයි ගනිමු.

$\alpha^2+\beta^2=4-2c$ බව පෙන්වන්න.

$c\neq 0$ හා $\lambda\in\mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ හා $\beta+\dfrac{1}{\beta}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $2x^2+12x+\lambda=0$ වේ. c හා λ හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) $f(x)=x^3+px^2+qx+p$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q\in\mathbb{R}$ වේ. $f(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය, $f(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයට වඩා 36 ක් වැඩි ය. $3p+q=29$ බව පෙන්වන්න.

$(x+1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව ද දී ඇත.

$p=6$ හා $q=11$ බව පෙන්වා $f(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

ඒ නයින්, $f(x)=3(x+2)$ විසඳන්න.

(5) (5)

(*a*) $\Delta=4-4c>0.$

$\therefore\ c<1.$ (5) **[15]**

$\alpha+\beta=-2$ and $\alpha\beta=c.$
(5) (5)

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ (5)

$=4-2c.$ (5) **[20]**

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)=\dfrac{12}{2}$ (10)

$\alpha+\beta+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$ (5)

$-2-\dfrac{2}{c}=-6$ (5)

$\dfrac{2}{c}=4$

$c=\dfrac{1}{2}$ (5)

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\lambda}{2}$$ (10)

$$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\lambda}{2}$$

$$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\lambda}{2}$$ (5)

$$c+\frac{1}{c}+\frac{4-2c}{c}=\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{1}{2}+2+\frac{4-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\lambda}{2}$$ (5)

$$\frac{5}{2}+6=\frac{\lambda}{2}$$

$\therefore\ \lambda = 17.$ (5)

50

(b) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + p$

$f(x)$ යන්න $(x-2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය

$= f(2) = 8 + 4p + 2q + p = 8 + 5p + 2q.$ (5)

$f(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය

$= f(1) = 1 + p + q + p = 1 + 2p + q.$ (5)

$f(2) = 36 + f(1)$ බව දී ඇත. (5)

$8 + 5p + 2q = 36 + 1 + 2p + q.$

$3p + q = 29$ ——— ①

(5)

20

$(x+1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බැවින් $f(-1) = 0.$ (5)

$\therefore\ -1 + p - q + p = 0$

$\therefore\ 2p - q = 1$ ——— ② (5)

① හා ② $\Rightarrow$ $5p = 30$

$\therefore p = 6$ (5)

දැන් ① $\Rightarrow$ $18 + q = 29$

$\therefore q = 11.$ (5)

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$= (x+1)(x^2+5x+6)$ (5)

$= (x+1)(x+2)(x+3)$ (5)

30

$f(x) = 3(x+2)$

$(x+1)(x+2)(x+3) = 3(x+2)$

$(x+2)\,[(x+1)(x+3)-3] = 0$ (5)

$(x+2)(x^2+4x) = 0$

$x(x+2)(x+4) = 0$ (5)

$\therefore\ x = 0$ or $x = -2$ or $x = -4.$ (5)

15

---

12. (*a*) පවුලක දෙමාපියන් තම ළඟම ඥාතීන් 15 දෙනෙකු අතුරෙන් 6 දෙනෙකුට රාත්‍රී භෝජන සංග්‍රහයකට ආරාධනා කිරීමට තීරණය කරති. පියාට ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 5 දෙනෙකු හා ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකු සිටින අතර, මවට ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකු හා ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 4 දෙනෙකු සිටී.

(i) පියාට ඔහුගේ ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් මවට ඇයගේ ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි

(ii) පිරිමි ආරාධිතයන් 3 දෙනෙකු හා ගැහැනු ආරාධිතයන් 3 දෙනෙකු වන පරිදි, පියාට ඔහුගේ ළඟම ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් මවට ඇයගේ ළඟම ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි

වෙනස් විධි ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{r(r+2)(r+4)}$ හා $f(r) = \dfrac{1}{r(r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = AU_r$ වන පරිදි A තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{11}{96} - \frac{1}{4(n+1)(n+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+4)}$ බව පෙන්වන්න.

තවද, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} (mU_r + U_{n+1-r}) = \frac{11}{32}$ වන පරිදි m තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

12. (*a*)

පියා		මව	
ගැහැනු ඥාතීන්	පිරිමි ඥාතීන්	ගැහැනු ඥාතීන්	පිරිමි ඥාතීන්
5	3	3	4

(i) පියාට ඔහුගේ ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකුට ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන $= {}^5C_3$ (5)

මවට ඇයගේ ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකුට ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන $= {}^4C_3$ (5)

∴ පියාට ඔහුගේ ළඟම ගැහැනු ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් මවට ඇයගේ ළඟම පිරිමි ඥාතීන් 3 දෙනෙකුටත් ආරාධනා කළ හැකි වෙනස් විධි ගණන $= {}^5C_3 \times {}^4C_3$ (5)

$$= \frac{5!}{3!2!} \times \frac{4!}{3!1!} = \frac{5 \times \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} \quad 4 \times 40.$$ (5)

20

(ii)

	පියා	මව	වෙනස් විධි ගණන	
(10)	ගැහැනු 3 ක්	පිරිමි 3 ක්	$^5C_3 \times {^4C_3} = 40$	
	ගැහැනු 2 ක් හා පිරිමි 1 ක්	ගැහැනු 1 ක් හා පිරිමි 2 ක්	$^5C_2 \times {^3C_1} \times {^3C_1} \times {^4C_2} = 540$	(10)
	ගැහැනු 1 ක් හා පිරිමි 2 ක්	ගැහැනු 2 ක් හා පිරිමි 1 ක්	$^5C_1 \times {^3C_2} \times {^3C_2} \times {^4C_1} = 180$	(10)
	පිරිමි 3 ක්	ගැහැනු 3 ක්	$^3C_3 \times {^3C_3} = 1$	(5)

පිළිතුර = 40 + 540 + 180 + 1 = 761. (5)

40

(b) $f(r) - f(r+2) = \dfrac{1}{r(r+2)} - \dfrac{1}{(r+2)(r+4)}$ (5)

$= \dfrac{(r+4) - r}{r(r+2)(r+4)}$ (5)

$= 4\ \dfrac{1}{r(r+2)(r+4)}$

$= 4U_r$ (5)

$\therefore\ A = 4.$ (5)

20

$\therefore\quad 4U_r = f(r) - f(r+2)$ for $r \in \mathbb{Z}^+$.

$r = 1 \quad : \quad 4U_1 = f(1) - f(3)$

$r = 2 \quad : \quad 4U_2 = f(2) - f(4)$ (5)

$r = 3 \quad : \quad 4U_3 = f(3) - f(5)$

. . . .

. . . .

. . . .

$r = n-2 \quad : \quad 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r = n-1 \quad : \quad 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$ (5)

$r = n \quad : \quad 4U_n = f(n) - f(n+2)$

$$4\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$ (10)

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)}$$ (10)

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{11}{96} - \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)}$$ (5)

35

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{11}{96}-\frac{1}{4(n+1)(n+3)}-\frac{1}{4(n+2)(n+4)}\right\} \quad (5)$$

$$=\frac{11}{96}. \quad (5)$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන අතර එහි ඓක්‍යය $=\frac{11}{96}$. (5)

[15]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(mU_r + U_{n+1-r}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(m\sum_{r=1}^{n}U_r + \sum_{r=1}^{n}U_{n+1-r}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(m\sum_{r=1}^{n}U_r + \sum_{r=1}^{n}U_r\right) \quad (10)$$

$$=(m \quad 1)\sum_{r=1}^{\infty}U_r$$

$$\therefore (m+1)\frac{11}{96}=\frac{11}{32} \quad (5)$$

$\therefore m+1 = 3$ හා $m = 2$. (5)

[20]

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 3 & b & a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $2\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ යැයි දී ඇත.

$a = 0$ හා $b = 5$ බව පෙන්වන්න.

a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{C}$ සොයා $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ වන පරිදි වූ $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$

(iii) $z_1 \overline{z}_1 = |z_1|^2$

බව පෙන්වන්න.

$z_2 \neq 0$ සඳහා $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $|z_1| = 1$ හා $z_1 \neq \pm 1$ නම් ද $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ යන්න තාත්ත්වික ද නම්, $|z_2| = 1$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\sqrt{3} + i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

ද මුවාවර් ප්‍රමේය භාවිතයෙන්, $\dfrac{\left(\sqrt{3} + i\right)^{24}}{2^{23}(1+i)} = 1 - i$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $2\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 3 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(10) $$\begin{pmatrix} 2 & 4+a & -2+b \\ 6+3 & 2a+b & 4+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow 4 + a = 4$, $-2 + b = 3$ හා $2a + b = 5$ (10) ඕනෑම දෙකක් සඳහා.

$\Leftrightarrow a = 0$ හා $b = 5$. (5)

25

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$

(5)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = -\frac{1}{175} \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

[25]

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{175} \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{175} \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

[15]

(*b*) Let $z_1 = x_1 + iy_1$ හා $z_2 = x_2 + iy_2$; මෙහි $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$

$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$ (5)

$= (x_1 - iy_1) + (x2 - iy_2)$

$= \overline{z_1} \ \overline{z_2}+.$ (5)

[10]

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)}$

$= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)}$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$ (5)

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$ (5)

$\therefore \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$ (5)

15

(iii) $z_1\overline{z_1} = (x_1 \quad iy_1)(x_1 \quad iy_1)$

$= x_1^2 \quad y_1^2 +$ (5)

$= |z_1|^2 .$ (5)

10

$\overline{\left(\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)} = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ (5)

$\Rightarrow \dfrac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ (5)

$\Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_1} z_1 z_2 + \overline{z_2} + \overline{z_2} z_1 z_2 = z_1 + z_2 + \overline{z_1}\,\overline{z_2} z_1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2} z_2 = 0$

$\Rightarrow \overline{z_1} + |\overline{z_1}|^2 z_2 + \overline{z_2} + z_1 |\overline{z_2}|^2 = z_1 + z_2 + \overline{z_2} |\overline{z_1}|^2 + \overline{z_1} |\overline{z_2}|^2 = 0$ (5)

$\Rightarrow \overline{z_1} + \cancel{z_2} + \cancel{\overline{z_2}} + z_1 |z_2|^2 = z_1 + \cancel{z_2} + \cancel{\overline{z_2}} + \overline{z_1} |z_2|^2 = 0$

$\Rightarrow (z_1 - \overline{z_1})\left(|\overline{z_2}|^2 - 1\right) = 0$ (5)

$\Rightarrow |z_2|^2 - 1 = 0 \quad (\because \overline{z_1} \quad z_1) \quad \neq$

$\Rightarrow |z_2| = 1.$ (5)

$(|z_1| = 1 \text{ and } z_1 \quad 1) \quad \neq \pm$

25

(c) $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\quad i\frac{1}{2}\right)+$ (5)

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\quad i\sin\frac{\pi}{6}\right)+$ (5)

$r=2$ හා $\theta=\frac{\pi}{6}$.

$\frac{\sqrt{3}+i}{2^{23}(1+i)}=\frac{2^{24}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)}{2^{23}(1+i)}$ (5)

$=\frac{2}{1+i}\ \frac{1-i}{1-i}$ (5)

$=\frac{2(1-i)}{2}$

$=1-i.$ (5)

25

---

14. (*a*) $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{px+q}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට $(0, 1)$ හි දී ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බව දී ඇත. $p = -3$ හා $q = 2$ බව පෙන්වන්න. p හා q හි මෙම අගයන් සඳහා, $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 1, 2$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, $x^2(x-1)(x-2) = 2 - 3x$ සමීකරණයේ තාත්ත්වික විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(*b*) පියනක් සහ පතුලක් සහිත සිලින්ඩරයක්, පරිමාව $1024\pi \text{ cm}^3$ වන පරිදි සාදා ඇත. සිලින්ඩරයේ අරය r cm යැයි ගනිමු. සිලින්ඩරයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S \text{ cm}^2$ යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 2\pi\left(\dfrac{1024}{r} + r^2\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන්නේ $r = 8$ වන විට බව පෙන්වන්න.

(*a*) $f(0) = 1$ බැවින් $\dfrac{q}{2} = 1$ වේ.

$\therefore\ q = 2$ (5)

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)p - (px+q)(x-1+x-2)}{(x-1)^2(x-2)^2}$$; $x \neq 1, 2$ සඳහා (10)

$f'(0) = 0$ බැවින් $2p - q(-3) = 0$ වේ. (5)

$\therefore\ 2p = -3q$

$= -6$

$\therefore\ p = -3$ (5)

25

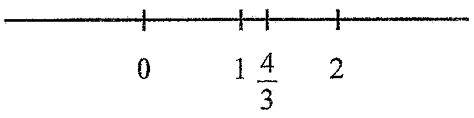
$$f'(x) = \frac{-3(x^2-3x+2) - (-3x+2)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}$$ (5)

$$= \frac{-3x^2+9x-6+6x^2-13x+6}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x^2-4x}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$$ (5) for $x \neq 1, 2$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = \dfrac{4}{3}$. (5)



	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < 2$	$2 < x < \infty$	
Sign of $f'(x) = \dfrac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$	$\frac{(-)(-)}{(+)}$ $= (+)$ (5)	$\frac{(+)(-)}{(+)}$ $= (-)$ (5)	$\frac{(+)(-)}{(+)}$ $= (-)$ (5)	$\frac{(+)(+)}{(+)}$ $= (+)$ (5)	$\frac{(+)(+)}{(+)}$ $= (+)$ (5)	
$f(x)$	↗ ∩	↘	↘ ∪	↗	↗	(10)

$(-\infty, 0]$, $[\frac{4}{3}, 2)$ හා $(2, \infty)$ මත වැඩි වේ.

$(0, 1]$ හා $[1, \frac{4}{3})$ මත අඩු වේ.

50

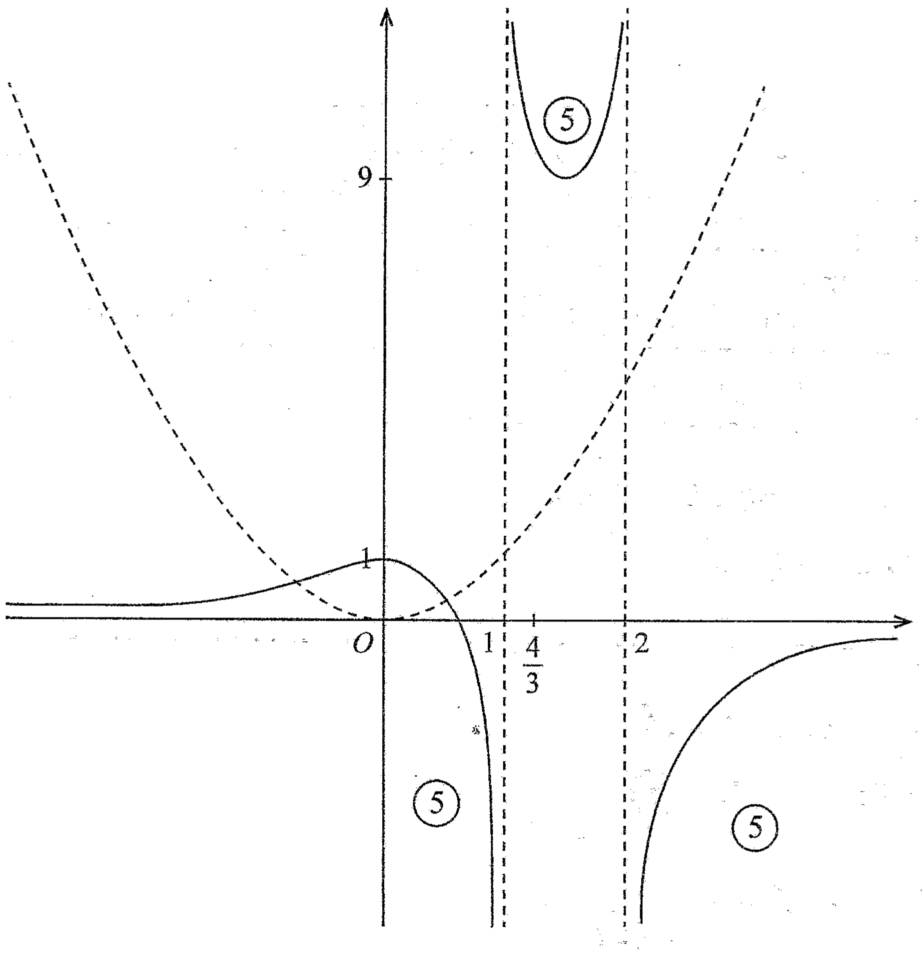
$(0, 1)$ හිදී ස්ථානීය උපරිමයකි. (5)

$(\frac{4}{3}, 9)$ හිදී ස්ථානීය අවමයකි. (5)

$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = \infty$ (5)

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. (5)



35

$x^2(x-1)(x-2) = 2 - 3x$

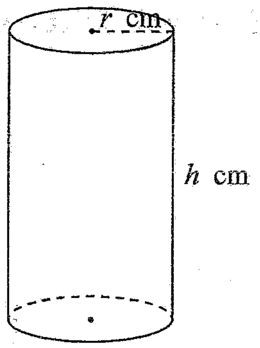
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2-3x}{(x-1)(x-2)}$ (5)

$\Leftrightarrow x^2 = f(x)$

$\therefore$ තාත්ත්වික විසඳුම් ගණන $= 2.$ (5)

10

(b)



$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$\pi r^2 h = 1024\pi$

$\therefore \quad h = \dfrac{1024}{r^2}$ (5)

$\therefore \quad S = 2\pi r \dfrac{1024}{r^2} + 2\pi r^2$

$\quad = 2\pi\left(\dfrac{1024}{r} + r^2\right)$ (5)

[10]

$\dfrac{dS}{dr} = 2\pi\left(-\dfrac{1024}{r^2} + 2r\right)$ (5)

$\dfrac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow$ (5) $\Rightarrow \dfrac{1024}{r^2} = 2r$

$\Leftrightarrow r^3 = 512$

$\Leftrightarrow r = 8.$ (5)

$0 < r < 8$ සඳහා $\dfrac{dS}{dr} < 0$ වේ.

$r > 8$ සඳහා $\dfrac{dS}{dr} > 0$ වේ.

$\therefore$ S අවම වන්නේ $r = 8$ විට ය. (5)

[20]

---

15. (*a*) සියලු $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $3t^2 + 4 = A(t^2 - 2t + 4) + Bt(t + 1)$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන්හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\displaystyle\int \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)}\,dt$ සොයන්න.

(*b*) $u = x + \sqrt{x^2+3}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{2}\ln 3$ බව පෙන්වන්න.

$J = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $2J = 2 + \displaystyle\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$J = 1 + \frac{3}{4}\ln 3$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)dx = \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $3t^2 + 4 = A(t^2 - 2t + 4) + Bt(t + 1)$

$\qquad = (A + B)t^2 + (-2A + B)t + 4A$ (5)

t^2 හි සංගුණක : $3 = A + B$

t^1 හි සංගුණක : $0 = -2A + B$

t^0 හි සංගුණක : $4 = 4A$

$\therefore\ A = 1$ හා $B = 2$.

(5) (5)

15

$$\therefore \quad \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)} = \frac{1}{t+1} \quad \frac{2t}{t^2-2t+4}. \quad (10)$$

$$\int \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)}\,dt = \int \left\{ \frac{1}{t+1} \quad \frac{2t-2+2}{t^2-2t+4} \right\} dt$$

$$= \int \frac{1}{t+1}\,dt \quad \int \frac{2t-2}{t^2-2t+4}\,dt \quad 2\int \frac{1}{(t-1)^2+3}\,dt$$

$$= \ln|t \quad 1| \quad \ln|t^2 \quad 2t \quad 4| \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right) + C, \quad (5)$$

(5) (5) (5)

මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

30

(b) $u = x + \sqrt{x^2+3}$.

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \quad \frac{u}{\sqrt{x^2+3}} \quad (5)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{u}\,du$$

$x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{3}$.

$x = 1 \Rightarrow u = 3$. (5)

$$\text{So,} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{u}\,du = \ln|u|\Big|_{\sqrt{3}}^{3} = \ln 3 \quad \ln\sqrt{3}$$

(5) (5)

$$= \ln\sqrt{3} \quad \frac{1}{2}\ln 3. \quad (5)$$

25

$$J = \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx = x\sqrt{x^2+3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}\,dx \quad (10)$$

$$= 2 \quad \int_0^1 \frac{x^2+3-3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx \quad (5)$$

$$-\ \therefore\ J = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx \quad \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx \qquad (10)$$

$$\Rightarrow 2J = 2 \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx. \qquad (5)$$

30

$$\therefore\ J = 1 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\ln 2$$

$$= 1 + \frac{3}{4}\ln 2 \qquad (10)$$

10

(c) Let $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)dx.$

$$\text{Then } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right)dx \qquad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x}\right)dx \qquad (10)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x + \sin x}{2\cos x}\right)dx \qquad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{1}{2}\right)dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)dx \qquad (10)$$

$$\therefore\ = I \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right)x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \quad I. - \qquad (5)$$

$$\Rightarrow 2I = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\ \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right). \qquad (5)$$

40

---

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (a, b)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. AB රේඛා ඛණ්ඩයේ l ලම්බ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය $x + y - 4 = 0$ බව දී ඇත. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

$C \equiv (3, 1)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය l රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වා $A\hat{C}B$ සොයන්න.

A, B හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය S යැයි ගනිමු. S හි කේන්ද්‍රය $\left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා S හි සමීකරණය සොයන්න.

ඒ නයින්, A, B ලක්ෂ්‍ය හා $D \equiv (0, 3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $\equiv \left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$. (5)

මෙම ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටයි.

$\therefore \frac{1+a}{2} + \frac{2+b}{2} - 4 = 0$

$\therefore a + b = 5$ ——— ① (5)

තවද l යන්න AB ට ලම්බක වේ.

(5)

$\therefore \left(\frac{b-2}{a-1}\right) \times (-1) = -1$. (5)

$\therefore b - 2 = a - 1$

$\therefore b - a = 1$ ——— ② (5)

දැන්, ① හා ② මගින් $a = 2$ හා $b = 3$ ලැබේ.
(5) (5)

එවිට, $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (2, 3)$ හා $C \equiv (3, 1)$.

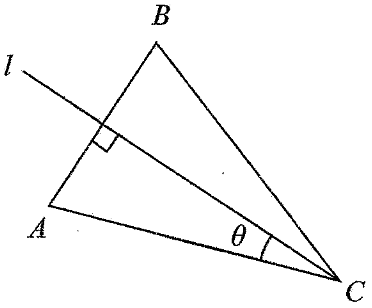
35

Substitute $x = 3$ හා $y = 1$, $x + y - 4 = 0$ හි ආදේශ කරමු. (5)

ව.පැ. $= 3 + 4 - 1$

$= 0 =$ ද.පැ.

$\therefore l$ මත C පිහිටයි. (5)



AC හා l අතර කෝණය θ යැයි ගනිමු.

එවිට θ සුළු කෝණයකි.

AC හි අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{2}$. (5)

$$\tan\theta = \left| \frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)} \right| = \frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right). \quad (5)$$

$$\therefore \; A\hat{C}B = 2\theta \quad 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right). \quad (5)$$

[35]

AC හි ලම්බ සමච්ඡේදකය m යැයි ගනිමු.

m හි අනුක්‍රමණය $= 2$ වේ. (5)

AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $\equiv \left(2, \frac{3}{2}\right)$. (5)

m හි සමීකරණය : $y - \frac{3}{2} = 2(x \;\; 2)$ (5)

එනම් $y - 2x + \frac{5}{2} = 0$.

S හි කේන්ද්‍රය l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ. (5)

$x + y - 4 = 0$ හා $y - 2x + \frac{5}{2} = 0$ සමගාමීව විසඳීමෙන්, (5)

$3x = 4 + \frac{5}{2}$ අපට ලැබේ.

$\therefore \; x = \frac{16}{3}$ හා $y = 4 - \frac{13}{6} = \frac{11}{6}$.

(5) (5)

$\therefore$ S හි කේන්ද්‍රය $\equiv \left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$.

$$S \text{ හි අරය } = \sqrt{\left(\frac{13}{6}-1\right)^2 + \left(\frac{11}{6}-2\right)^2} \quad (10)$$

$$= \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{1}{36}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{18}} \quad (5)$$

$\therefore$ S හි සමීකරණය : $\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{11}{6}\right)^2=\frac{25}{18}$. (10)

$x^2+y^2-\frac{13}{3}x-\frac{11}{3}y+\frac{20}{3}=0$

60

$\therefore$ AB හි සමීකරණය : $y-2=1(x-1)$ (5)

එනම් $x-y+1=0$

A හා B හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{25}{18}+\lambda(x-y+1)=0$, මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $\lambda\in\mathbb{R}$. (10)

මෙය $D\equiv(0,3)$, හරහා යෑමට $\left(\frac{13}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{25}{18}+\lambda(-2)=0$ විය යුතු ය.

$\lambda=\frac{21}{9}$ $\frac{7}{3}$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $x^2+y^2-2x-6y+9=0$.

20

---

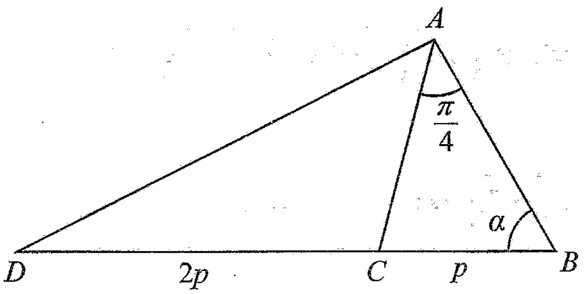
17. (*a*) $6\cos 2x - 8\sin 2x$ යන්න $R\cos(2x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R > 0$ හා $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වේ.

ඒ නයින්, $6\cos 2x - 8\sin 2x = 5$ විසඳන්න.

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$ යන්න $a\cos 2x + b\sin 2x + c$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a, b, c\ (\in \mathbb{R})$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$ හි අවම අගය **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*)



රූපයෙහි පෙන්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයෙහි $BC = p$, $B\hat{A}C = \frac{\pi}{4}$ හා $A\hat{B}C = \alpha$ වේ. දික් කළ BC රේඛාව මත D පිහිටා ඇත්තේ $CD = 2p$ වන පරිදි ය.

$AB = p(\cos\alpha + \sin\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

p හා α ඇසුරෙන් AD^2 සොයන්න.

$AD = 3p$ නම් $\alpha = \tan^{-1}(5)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*) $6\cos 2x - 8\sin 2x$ $\qquad \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$= 10\left(\frac{6}{10}\cos 2x - \frac{8}{10}\sin 2x\right)$ (5)

$= 10\left(\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{4}{5}\sin 2x\right)$

$= 10(\cos\alpha\cos 2x - \sin\alpha\sin 2x)$, මෙහි $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යන්න $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ හා $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ වන පරිදි වේ. (5)

(5)

$= 10\cos(2x \quad \alpha)$. (5)

$\therefore\ R = 10$ and $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$. (5)

25

$6\cos 2x - 8\sin 2x = 5$

$10\cos(2x+\alpha) = 5$ (5)

$\therefore\ \cos(2x+\alpha) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ (5)

$2x+\alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$. (5)

$\therefore\ x = n\pi - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}$; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$. (5)

[20]

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$

$= 24\left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right) - 32 \times \frac{1}{2}\sin 2x$ (10)

$= 12\cos 2x - 16\sin 2x + 12$

$\therefore\ a = 12,\quad b = -16$ හා $c = 12.$ (5)

[15]

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$

$= 12\cos 2x - 16\sin 2x + 12$

$= 2(6\cos 2x - 8\sin 2x) + 12$

$= 20\cos(2x+\alpha) + 12$ (5)

අවමය $= -1$

$\therefore$ අවශ්‍ය අවමය $= -20 + 12$

$= -8.$ (5)

[10]

(*b*) $\triangle ABC$ සඳහා සයින් නීතිය :

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{p}{\sin\frac{\pi}{4}} \quad (10)$$

$$\therefore \quad AB=\sqrt{2}p\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) \quad (5)$$

$$=\sqrt{2}p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$$

$$=p(\cos\alpha \quad \sin\alpha). \quad (5)$$

20

$\triangle ABD$ සඳහා කොසයින් නීතිය :

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\alpha \quad (5)$$

$$=p^2(\cos\alpha \quad \sin\alpha)^2 \quad 9p^2+ \quad 2p(\cos\alpha \quad \sin\alpha)\ 3p\cos\alpha \quad (5)$$

$AD=3p$ යැයි සිතමු.

එවිට $9p^2=p^2(\cos\alpha \quad \sin\alpha)^2 \quad 9p^2+ \quad 6p^2(\cos\alpha \quad \sin\alpha) \ \cos\alpha$ (5)

$$\therefore \quad (\cos\alpha+\sin\alpha)^2-6(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha+\sin\alpha=6\cos\alpha \quad (5) \qquad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

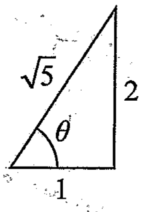
$$\Rightarrow \quad \sin\alpha=5\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha=5$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=\tan^{-1}(5). \quad (5)$$

25

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \tan^{-1}(2)$. (5)



Let $\alpha = \tan^{-1}(x+1)$ හා $\beta = \tan^{-1}(x-1)$ යැයි ගනිමු.

$\alpha + \beta = \tan^{-1}(2)$ (5)

$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 2$ (5)

$\Rightarrow \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 2$ (5)

$\Rightarrow \dfrac{x+1+x-1}{1-(x^2-1)} = 2$ (5) $\Rightarrow x = 2 - x^2$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)\ (x+2) = 0$

$x = 1$ or $x = -2$. (5)

$x = -2$ විසඳුමක් නොවේ. $x = 1$ විසඳුමකි.

$\therefore\ x = 1$. (5)

[35]

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි.

රහස්‍ය ලේඛනයකි.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2024

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
ප්‍රධාන/ සහකාර පරීක්ෂක රැස්වීමේ දී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2024

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

II පත්‍රය

A කොටස $10 \times 25 = 250$

B කොටස $05 \times 150 = 750$

එකතුව $= \frac{1000}{10}$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණු = 100

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.

   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමග □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) .... √ △ $\frac{4}{5}$

....

....

(ii) .... √ △ $\frac{3}{5}$

....

....

(iii) .... √ △ $\frac{3}{5}$

....

....

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = □ $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපත්‍ර ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

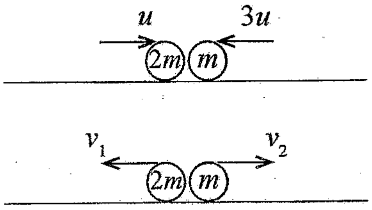
4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න.

***

1. ස්කන්ධය $2m$ වූ A අංශුවක් හා ස්කන්ධය m වූ B අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් u හා $3u$ වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු A හා B ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $e > \frac{1}{8}$ බව පෙන්වන්න.



පද්ධතිය සඳහා $\mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v})$: $\rightarrow$

$$0 = -2mv_1 + mv_2 - (2mu - 3mu) \quad (5)$$

$$2v_1 - v_2 = u \quad \text{------------} (1)$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන්:

$$v_2 + v_1 = e(u + 3u) \quad (5)$$

$$v_1 + v_2 = 4eu \quad \text{------------} (2)$$

(1) හා (2) $\Rightarrow 3v_1 = u + 4eu$

$$\therefore \; v_1 = \frac{1}{3}(1 + 4e)\,u > 0 \quad (5)$$

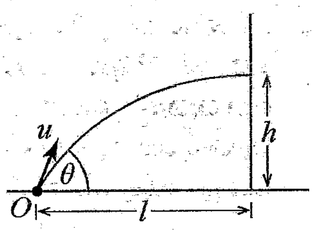
$$-3v_2 = u - 8eu$$

$$\therefore \; v_2 = \frac{1}{3}(8e - 1)\,u \quad (5)$$

$v_2 > 0$ සඳහා $e > \frac{1}{8}$ විය යුතු ය. (5)

2. තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට u ආරම්භක වේගයකින් තිරසට $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට l තිරස් දුරකින් පිහිටි සිරස් තාප්පයක, ගෙබිමේ සිට $h\,(>0)$ උසකින් ගැටේ (රූපය බලන්න).

$h=l\tan\theta \quad \frac{gl^2}{2u^2}\sec^2\theta$ බව පෙන්වා $\sin 2\theta>\frac{gl}{u^2}$ බව අපෝහනය කරන්න.



$$S=ut \quad \frac{1}{2}at^2: \longrightarrow \quad l=u\cos\theta\, t \qquad (5)$$

$$\uparrow \quad h=u\sin\theta \; t \quad \frac{1}{2}gt^2 \qquad (5)$$

$$\therefore \quad h=u\sin\theta\cdot\frac{l}{u\cos\theta} \quad \frac{1}{2}g\frac{l^2}{u^2\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad h=l\tan\theta \quad \frac{gl^2}{2u^2}\sec^2\theta \qquad (5)$$

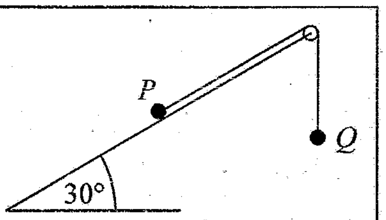
$$h>0 \Rightarrow \quad l\tan\theta>\frac{gl^2}{2u^2}\sec^2\theta \qquad (5)$$

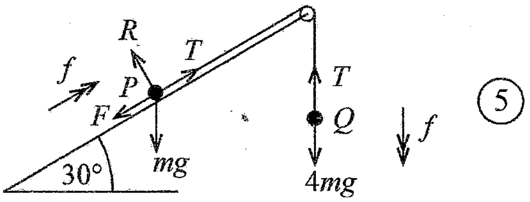
$$\Rightarrow \quad \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}>\frac{gl}{u^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}>\frac{gl}{u^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2\theta>\frac{gl}{u^2}. \qquad (5)$$

3. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තිරසට ආනතිය $30°$ ක් වූ රළු ආනත තලයක් මත ඇත. P අංශුව, ආනත තලයේ ඉහළින් වූ අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය $4m$ වූ සිරස්ව නිදහසේ චලනය විය හැකි Q අංශුවකට ඈඳා ඇත (රූපය බලන්න). ආනත තලය මත වූ තන්තු කොටස තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ පිහිටා ඇත. P හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P, ආනත තලයේ ඉහළට චලනය වන බව දී ඇත. තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.





$F = ma$:

(P) ↖ $R - mg\cos 30° = 0$ (5)

$\therefore \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$

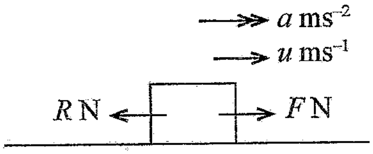
$F = \frac{1}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{4}mg$ (5)

(P) ↗ $T - F - mg\cos 60° = mf$ (5)

$\therefore \quad T - F - \frac{mg}{2} = mf$

(Q) ↓ $4mg - T = 4mf$ (5)

4. ස්කන්ධය M kg වූ මෝටර් රථයක්, එහි එන්ජිම P W නියත ජවයකින් ක්‍රියා කරමින්, තිරස් සෘජු මාර්ගයක් දිගේ ගමන් කරයි. කාරයෙහි චලිතයට R N නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. එහි වේගය u m s^{-1} වන මොහොතෙහිදී, කාරයෙහි ත්වරණය සොයන්න.
දැන්, මෝටර් රථය, තිරසට θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ ඉහළට නියත වේගයකින් ගමන් කරයි. කාරය, එම R N ප්‍රතිරෝධයටම යටත්ව එම P W ජවයම ඇතිව ක්‍රියා කරයි නම්, මෙම නියත වේගය සොයන්න.



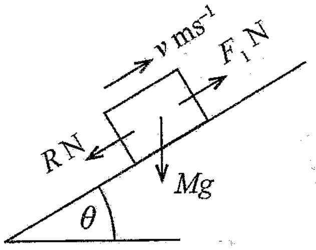
$$P = F \cdot u$$

$$\therefore \; F = \frac{P}{u} \quad (5)$$

$F = ma$: $\rightarrow$

$$F - R = M \cdot a \quad (5)$$

$$\therefore \; a = \frac{1}{M}\left(\frac{P}{u} \quad R\right) \text{ ms}^{-2}. \quad (5)$$



$$P = F_1 \quad v:$$

$$\therefore \; F_1 = \frac{P}{v}$$

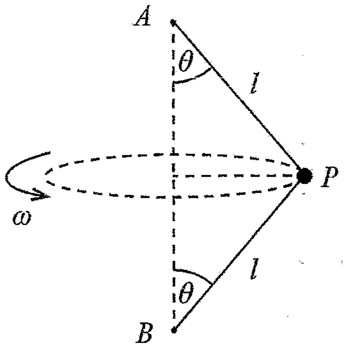
$F = ma$: $\nearrow$

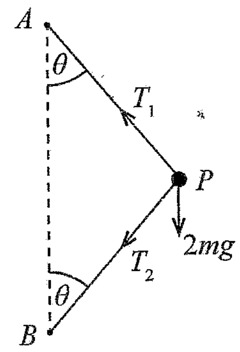
$$F_1 - R - Mg\sin\theta = 0 \quad (5)$$

$$\frac{P}{v} = R \quad Mg\sin\theta$$

$$\therefore \; v = \frac{P}{R + Mg\sin\theta} \text{ ms}^{-1}. \quad (5)$$

5. ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවක්, සිරස් රේඛාවක් මත පිහිටි A හා B අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට, එක එකක දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් ඈඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තු දෙකම තදව හා සිරස සමග θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදමින් ω නියත කෝණික ප්‍රවේගයකින් P අංශුව තිරස් වෘත්තයක චලනය වේ.
AP තන්තුවේ ආතතිය $m(l\omega^2 + g\sec\theta)$ බව පෙන්වන්න.





$\boldsymbol{F = ma}$:

(P) ↑ $T_1\cos\theta - T_2\cos\theta - 2mg = 0$ (5)

$\therefore\ T_1 - T_2 = 2mg\sec\theta$ ———————— (1) (5)

(P) ← $T_1\sin\theta + T_2\sin\theta = 2ml\sin\theta\,\omega^2$ (5)

$\therefore\ T_1 + T_2 = 2ml\omega^2$ ———————— (2) (5)

(1) හා (2) $\Rightarrow$ $2T_1 = 2mg\sec\theta \quad 2ml\omega^2 \quad +$

$\therefore\ T_1 = m(l\omega^2 \quad g\sec\theta)$. (5)

6. $\mathbf{u}$ හා $\mathbf{v}$ යනු $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}$ වන පරිදි වූ ඒකක දෛශික දෙකක් යැයි ගනිමු. $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v}$ හා $\mathbf{b}=\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$ යැයි ද ගනිමු. මෙහි $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ වේ. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ දෛශික ලම්බ ද $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ යන්න $\mathbf{u}$ ට සමාන්තර ද නම් α හා β හි අගයන් සොයන්න.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})$$

$$0=\alpha\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\alpha\beta\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\beta\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

$$0=\alpha+\alpha\beta\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\beta \text{ ---------- (1)} \quad (5)$$

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\lambda\mathbf{u}$; මෙහි $\lambda\in\mathbb{R}$. ---------- (2)

$(2)\cdot\mathbf{u} \Rightarrow (\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}+(\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$

$$\alpha+\frac{1}{2}+1+\beta\cdot\frac{1}{2}=\lambda \text{ ---------- (3)} \quad (5)$$

$(2)\cdot\mathbf{v} \Rightarrow (\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}+(\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}=\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$

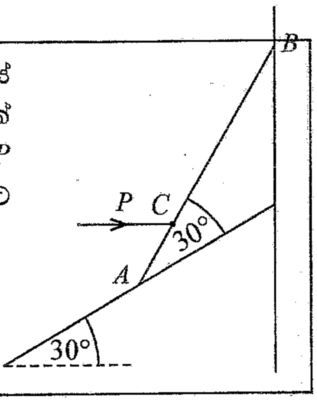
$$\frac{\alpha}{2}+1+\frac{1}{2}+\beta=\frac{\lambda}{2} \text{ ---------- (4)} \quad (5)$$

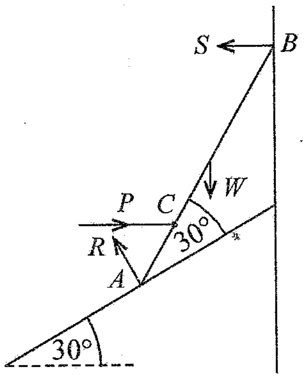
(3) හා (4) $\Rightarrow \quad \alpha+\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2}=\alpha+3+2\beta$

$\Rightarrow \quad \beta=-1.$ (5)

දැන්, (1) $\Rightarrow \alpha=1.$ (5)

7. දිග $4a$ හා බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එහි B ඉහළ කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද A පහළ කෙළවර 30° කින් තිරසට ආනත සුමට තලයක් මත ද ඇතිව සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ $AC = a$ වන C ලක්ෂ්‍යයෙහිදී P තිරස් බලයක් දණ්ඩට යෙදීමෙනි. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, දණ්ඩ ආනත තලයට 30° කින් ආනත වේ. P හි අගය සොයන්න.





(5)

$\rightarrow$ $P - S - R\sin 30^\circ = 0$ (5)

$\therefore \; P = S + \frac{R}{2}$

$\uparrow$ $R\cos 30^\circ - W = 0$ (5)

$\therefore \; R = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

$\overset{\curvearrowright}{A}$ $P \times a\sin 60^\circ + W \times 2a\cos 60^\circ - S \times 4a\sin 60^\circ = 0$ (5)

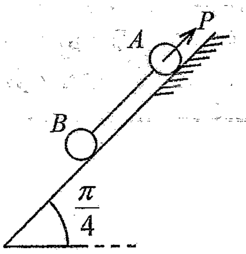
$P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + W - \left(P - \frac{R}{2}\right) 2\sqrt{3} = 0$

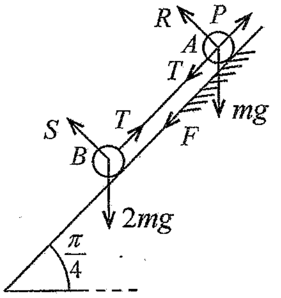
$\sqrt{3}P + 2W - 4\sqrt{3}P + \frac{2W}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = 0$

$3\sqrt{3}P = 6W.$

$P = \frac{2W}{\sqrt{3}}.$ (5)

8. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ A හා B අංශු 2ක් තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත වූ තලයක් මත තබා සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඈඳා සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ A ට යෙදූ P බලයක් මගිනි. P හි ක්‍රියා රේඛාව හා තන්තුව, තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ පිහිටයි. A අංශුව තලයේ රළු කොටස මත පිහිටන අතර B අංශුව තලයේ සුමට කොටස මත පිහිටයි. A හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ.
$2\left|\sqrt{2}\,P - 3mg\right| \le mg$ බව පෙන්වන්න.





(5)

පද්ධතිය සඳහා: ↗ $P - F - mg\sin\frac{\pi}{4} - 2mg\sin\frac{\pi}{4} = 0.$ (5)

$\therefore\ F = P \quad 3mg\ \frac{1}{\sqrt{2}}$

(A) ↖ $R - mg\cos\frac{\pi}{4} = 0$ (5)

$\therefore\ R = \frac{mg}{\sqrt{2}}$

සමතුලිතතාව සඳහා:

$\frac{1}{2} \ge \frac{|F|}{R}$ (5)

$\therefore\ \left|P - \frac{3mg}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{mg}{2\sqrt{2}}$ (5)

$\therefore\ 2\left|\sqrt{2}P - 3mg\right| \le mg.$

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක වූ සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(A\mid B)=\frac{1}{10}$ හා $P(B\mid A)=\frac{3}{10}$ බව දී ඇත. $P(B)$ හා $P(A\cup B)$ සොයන්න.

$P(B\mid A)=\frac{3}{10}$

$\therefore\ \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{3}{10}$ (5)

$\therefore\ P(B\cap A)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$ (5)

$P(A\mid B)=\frac{1}{10}$

$\therefore\ \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{10}$ (5)

$\therefore\ P(B)=10\times P(A\cap B)=10\times\frac{3}{50}=\frac{3}{5}$ (5)

$P(A\cup B)=P(A)\quad P(B)\quad P(A\quad B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}-\frac{3}{50}=\frac{37}{50}.$ (5)

10. ආරෝහණ පටිපාටියට සැකසූ, පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ හතෙහි මධ්‍යස්ථය, මාතය හා මධ්‍යන්‍යය පිළිවෙළින් 5, 7 හා 5 වේ:

$$1,\ 3,\ 4,\ p,\ q,\ r,\ s$$

මෙහි p, q, r හා s තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.
p, q, r හා s හි අගයන් සොයා, නිරීක්ෂණ හතෙහි විචලතාව $\frac{38}{7}$ බව පෙන්වන්න.

මධ්‍යස්ථය = 5.

$\therefore\ p = 5.$ (5)

මාතය = 7.

$\therefore$ q, r, s වලින් අඩු තරමින් දෙකක්වත් 7 ඒවා විය යුතු ය. (5)

ඒවායින් 2ක් 7 ඒවා යැයිද, අනෙක් එක a යැයිද ගනිමු.

මධ්‍යන්‍යය = 5

$\therefore\ 5 = \frac{1+3+4+5+7+7+a}{7}$ (5)

$35 = 27 + a$

$\therefore\ a = 8.$

එනම්, $q = r = 7$ හා $s = 8.$ (5)

විචලතාව $= \frac{1}{7}\left[(1-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + 2(7-5)^2 + (8-5)^2\right]$

$= \frac{1}{7}[16+4+1+8+9] = \frac{38}{7}.$ (5)

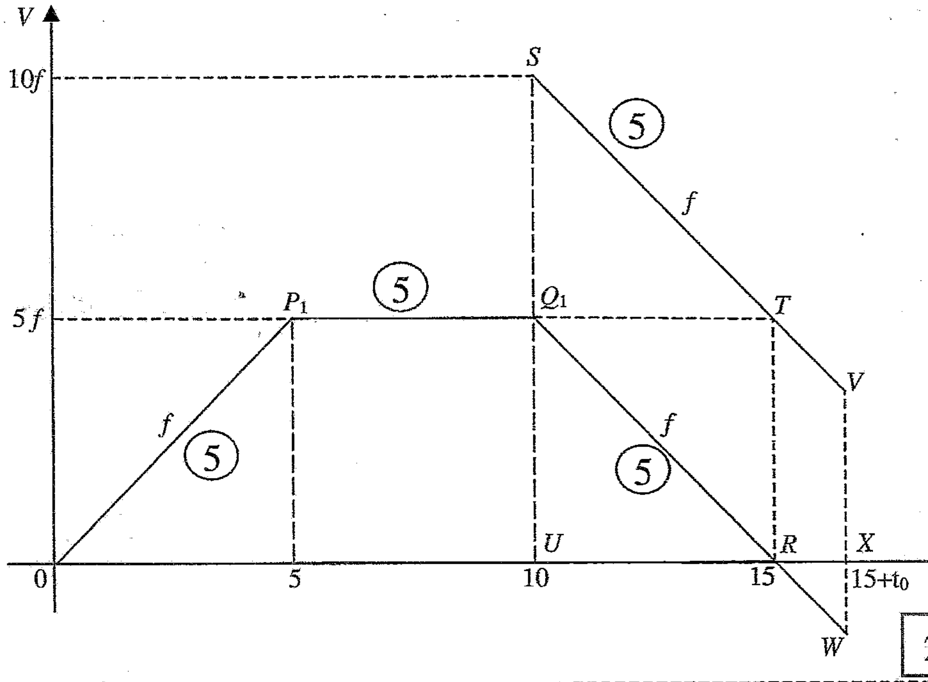
11. (a) ඍජු මාර්ගයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට කාලය $t=0$ s හිදී නිශ්චලතාවයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන P මෝටර් රථයක් f m s^{-2} නියත ත්වරණයකින් තත්පර 5 ක් ගමන් කරයි. පසුව එය $t=5$ s හිදී ලබාගත් නියත වේගයෙන් තවත් තත්පර 5 ක් ගමන් කර $t=10$ s හිදී f m s^{-2} ක නියත මන්දනයකින් මන්දනය වී A ලක්ෂ්‍යයකදී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. එසැනින් තම දිශාව වෙනස් කරන P මෝටර් රථය f m s^{-2} නියත ත්වරණයෙන්ම එම මාර්ගයේම නැවත O දෙසට ගමන් කරයි.

එම මාර්ගයේම O ලක්ෂ්‍යයේ සිට $t=10$ s හිදී $10f$ m s^{-1} ක ආරම්භක වේගයෙන් ගමන් ආරම්භ කරන Q මෝටර් රථයක් f m s^{-2} නියත මන්දනයෙන් P මෝටර් රථය දෙසට ගමන් කරයි. A ලක්ෂ්‍යයේදී P නිශ්චලතාවයට පත්වන විට, P හා Q අතර දුර 125 m බව දී ඇත. එකම රූපසටහනක P හා Q හි චලිත සඳහා, $t=0$ s සිට ඒවා මුණගැසෙන මොහොත දක්වා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

(i) $f=10$,

(ii) P හා Q මෝටර් රථ $t=17.5$ s හිදී මුණගැසෙන

බව පෙන්වන්න.



20

A වෙත ළඟා වීමට P ගනු ලැබූ කාලය $=15$ s ⑤

⑤ $t=10$s සිට $t=15$s දක්වා Q ගමන් කළ දුර

$= STRU$ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}(SU+TR)\times UR$ ⑤

$= \frac{1}{2}(10f+5f)\times 5$

$= \frac{75}{2}f$ m ⑤

O සිට Aට දුර $= OP_1Q_1R$ වර්ගඵලය ⑤

$= \frac{1}{2}\times(5+15)\times 5f = 50f$ m ⑤

දත්තයෙන් : $125 = 50f - \frac{75}{2}f$ ⑤

$250 = 25f$

$\therefore f = 10$ ⑤

40

$t=(15+t_0)s$ හිදී P හා Q හමු වන්නේ යැයි සිතමු.

ඔවුන් හමුවන්නේ $RTVX$ වර්ගඵලය + RWX වර්ගඵලය = 125 විටය. (5)

එනම් $RTVW$ වර්ගඵලය = 125 විටය.

$$TR \times RX = 125 \quad (5)$$

$$5f \times t_0 = 125 \quad (5)$$

$$50 \times t_0 = 125$$

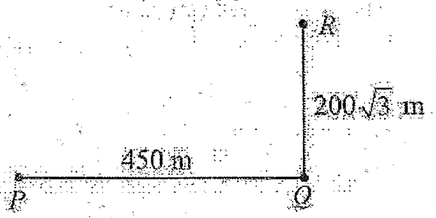
$$\therefore t_0 = \frac{125}{50} = 2.5s$$

$\therefore P$ හා Q හමුවන්නේ $t=(15+2.5)s$ විටය.

$$= 17.5s. \quad (5)$$

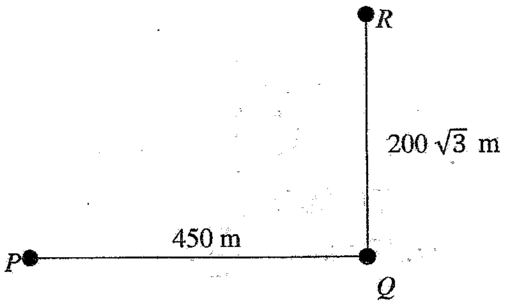
25

(b) P, Q සහ R බෝට්ටු තුනක් සරල රේඛීය පථවල ඒකාකාර වේගවලින් ගමන් කරයි. එක්තරා මොහොතකදී P බෝට්ටුවෙන් 450 m දුරක් නැගෙනහිරින් Q බෝට්ටුව පිහිටන අතර Q බෝට්ටුවෙන් $200\sqrt{3}$ m දුරක් උතුරින් R බෝට්ටුව පිහිටයි (රූපය බලන්න). P බෝට්ටුව, Q බෝට්ටුව හමුවීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරන අතර Q බෝට්ටුව, R බෝට්ටුව හමුවීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරයි.



P බෝට්ටුව තත්පර 45 කින් Q බෝට්ටුව හමුවන බවත්, Q බෝට්ටුව තත්පර 20 කින් R බෝට්ටුව හමුවන බවත් දී ඇත.

Q බෝට්ටුවට සාපේක්ෂව P බෝට්ටුවෙහි වේගය 10 m s^{-1} බව පෙන්වා Q බෝට්ටුව R බෝට්ටුව හමුවන මොහොතෙහිදී P බෝට්ටුව හා R බෝට්ටුව අතර දුර සොයන්න.



20

$$\underline{V}(P,Q) = \frac{450}{45} \text{ m s}^{-1} \rightarrow \quad (10)$$

$$= 10 \text{ m s}^{-1} \rightarrow \quad (5)$$

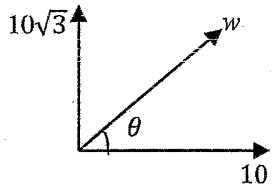
$\therefore Q$ ට සාපේක්ෂව P හි වේගය $= 10 \text{ m s}^{-1}$. (5)

$$\underline{V}(Q,R) = \frac{200\sqrt{3}}{20} \text{ m s}^{-1} \uparrow \quad (10)$$

$$= 10\sqrt{3} \text{ m s}^{-1} \uparrow \quad (5)$$

40

$$\underline{V}(P,R)=\underline{V}(P,Q)+\underline{V}(Q,R) \quad (5)$$



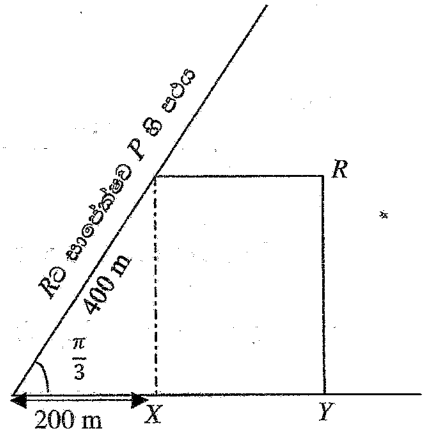
$$w=\sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2+10^2} \quad (5)$$

$$=20 \text{ ms}^{-1}$$

$$\tan\theta=\frac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3} \quad (5)$$

After 20 s :



(10)

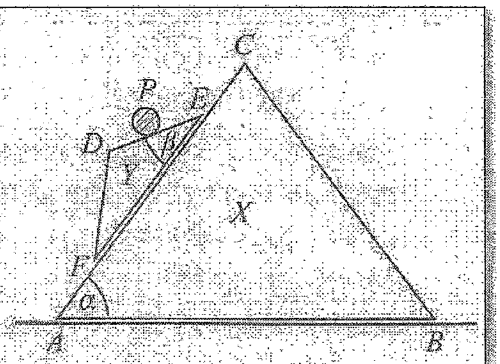
අවශ්‍ය දුර $= XY$

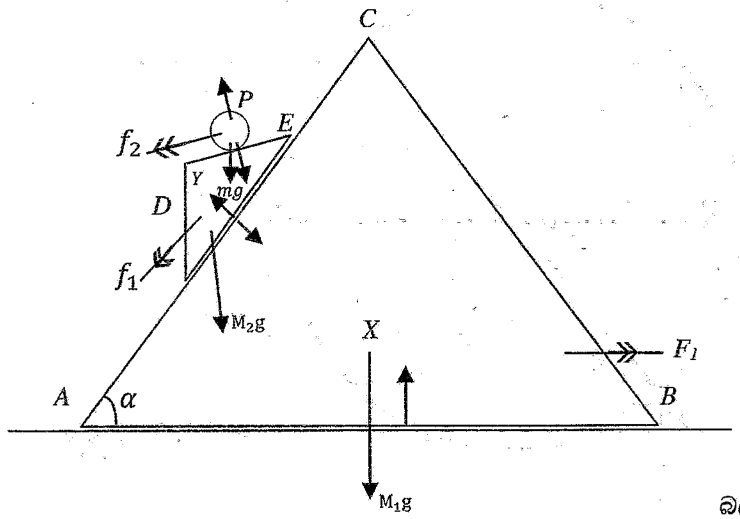
$$=(450-200) \text{ m}$$

$$=250 \text{ m.} \quad (5)$$

65

12. (a) X, Y සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤ දෙකක හා P අංශුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍ර තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ, රූපයෙන් දැක්වේ. AC, DE හා EF රේඛා ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර $B\hat{A}C = \alpha$ හා $D\hat{E}F = \beta\,(< \alpha)$ වේ. ස්කන්ධය M_1 වූ X කුඤ්ඤයේ AB අයත් මුහුණත සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. ස්කන්ධය M_2 වූ Y කුඤ්ඤයේ EF අයත් මුහුණත X හි AC අයත් මුහුණත මත තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුව DE මත තබා ඇත. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. Y කුඤ්ඤය එහි EF මුහුණත X හි AC අයත් මුහුණත ස්පර්ශ කරමින් චලනය වන හා P අංශුව DE ස්පර්ශ කරමින් චලනය වන අතරතුර, X කුඤ්ඤයේ ත්වරණය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.





$\mathbf{a}(X,E) = F_1 \longrightarrow$

$\mathbf{a}(Y,X) = f_1$ (α දිශාවට) (10)

$\mathbf{a}(P,Y) = f_2$ ($\alpha-\beta$ දිශාවට)

බල සඳහා (10)

$\mathbf{F = ma}$ යොදමු :

පද්ධතිය සඳහා $\rightarrow$:

$$O = M_1F_1 + M_2\left(F_1 - f_1\cos\alpha\right) + m\left(F_1 - f_1\cos\alpha - f_2\cos(\alpha-\beta)\right).$$ (10)

(5) (5) (5)

65

Y හා P සඳහා (α) :

$$(M_2+m)\,g\sin\alpha = M_2\left(f_1 - F_1\cos\alpha\right) + m\left(f_1 + f_2\cos\beta - F_1\cos\alpha\right).$$ (10)

(5) (5) (5)

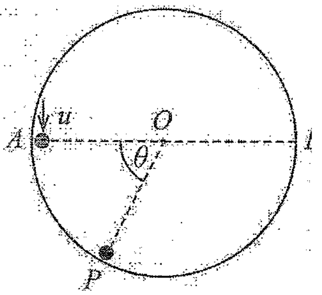
P සඳහා ($\alpha - \beta$)

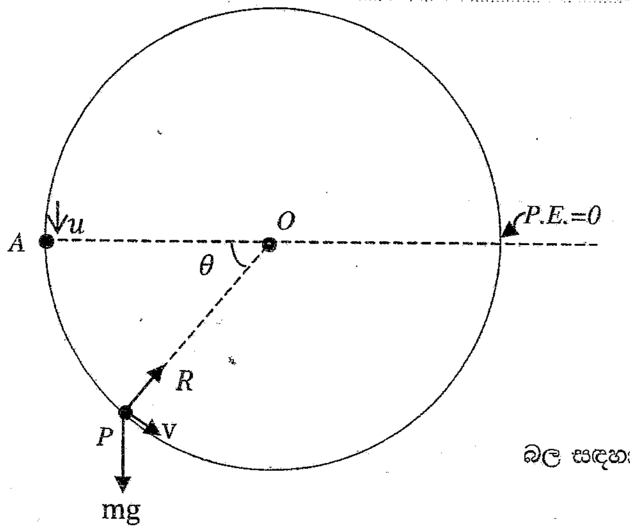
$$mg\sin(\alpha-\beta) = m\left(f_2 - f_1\cos\alpha - F_1\cos(\alpha-\beta)\right).$$ (10)

(5) (5)

90

(b) සුමට අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨයක් සහිත අරය a වන අචල සෘජු-වෘත්තාකාර කුහර සිලින්ඩරයක තිරස් අක්ෂයට ලම්බක සිරස් හරස්කඩක් යාබද රූපයෙන් දැක්වේ.
O ලක්ෂ්‍යය එහි කේන්ද්‍රය ද, A හා B එහි තිරස් විෂ්කම්භයේ අන්ත ද වේ. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් u වේගයෙන් සිලින්ඩරයේ අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය මත A සිට සිරස්ව යටි දිශාවට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබේ. P, සිලින්ඩරය සමග ස්පර්ශව ඇතිව, θ කෝණයකින් OP හැරුණු විට P හි වේගය v යැයි ගනිමු.
$v^2 = u^2 + 2ga\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.
$\theta = \frac{7\pi}{6}$ විට, P සිලින්ඩරයේ අභ්‍යන්තර පෘෂ්ඨය හැර යන බව දී ඇත. $u = \sqrt{\frac{3ga}{2}}$ බව පෙන්වන්න.



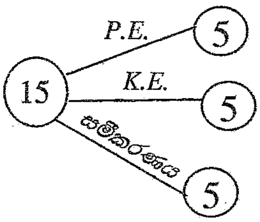


බල සඳහා (5)

ශක්ති සංස්ථිතියෙන් ៖

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mga\sin\theta$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2ga\sin\theta \quad (5)$$



(m) θ↗ **F = ma** :

$$R - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{a} \qquad 10$$

$$\therefore R = \frac{m}{a}\left(u^2 + 2ga\sin\theta\right) + mg\sin\theta \quad (5)$$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$ විට $R=0$ වේ. (5)

$$\therefore \quad 0 = \frac{m}{a}\left(u^2 + 2ga\sin\frac{7\pi}{6}\right) + mg\sin\frac{7\pi}{6} \quad (5)$$

$$\therefore \quad 0 = u^2 + 2ga\left(-\frac{1}{2}\right) + ga\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (5)$$

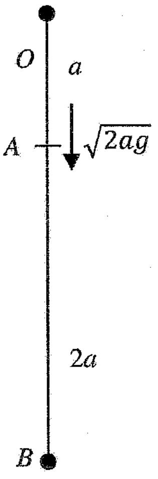
$$\therefore \quad u^2 = \frac{3ga}{2}$$

$$\therefore \quad u = \sqrt{\frac{3ga}{2}}\,. \quad (5)$$

35

---

13. ස්වභාවික දිග a වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා, P සිරස් චලිතයේ යොදවා ඇත. අංශුව සිරස්ව පහළට ගමන් කරන විට O ට පහළින් $OA = a$ වන A ලක්ෂ්‍යය පසු කරද්දී එහි වේගය $\sqrt{2ag}$ වේ. O ට $3a$ පහළින් වූ B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $\frac{3}{2}mg$ බව පෙන්වන්න.
තව ද, P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \omega^2\left(x - \frac{5a}{3}\right) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $x > a$ සඳහා $OP = x$ වන අතර $\omega\ (> 0)$ නිර්ණය කළ යුතු නියතයක් වේ.
ඉහත චලිත සමීකරණය, $X = x - \frac{5a}{3}$ ලෙස ගෙන නැවත ලියන්න.
අංශුවේ මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය, විස්තාරය හා ආවර්ත කාලය සොයන්න.
$\dot{X}^2 = \omega^2(C^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් P හි උපරිම වේගය සොයන්න; මෙහි C යනු විස්තාරය වේ.
එය ඉහළට යාමේදී, P යන්තමින් O ට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.
B සිට O දක්වා ගමන් කිරීමට P ට ගතවන මුළු කාලය $\sqrt{\frac{2a}{27g}}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.
ඉහත සරල අනුවර්තීය චලිතය ආරම්භ කරනු ලැබුවේ P පහළට ඇද අත හැරීමෙන් නම්, තන්තුව එහි ස්වභාවික දිගේ සිට කොපමණ දුරක් ඇදිය යුතු දැයි ප්‍රකාශ කරන්න.



ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ යැයි සිතමු.

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන් :

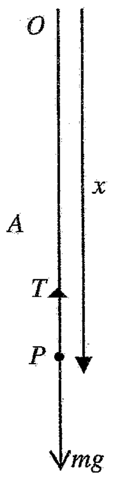
$$\frac{1}{2}m \times 2ga + mg \times 2a = \frac{1}{2}\frac{\lambda(2a)^2}{a} \quad (5)$$

(5) (5) (5)

$$3mga = 2\lambda a$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{3}{2}mg. \quad (5)$$

25



F = ma: ↓

$$mg - T = m\ddot{x} \quad (5)$$

$$mg - \frac{3}{2}mg\frac{(x-a)}{a} = m\ddot{x}$$

(5)

$$\ddot{x} = g - \frac{3}{2}g\frac{x}{a} + \frac{3g}{2}$$

$$\ddot{x} + \frac{3g}{2a}x - \frac{5}{2}g = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{3g}{2a}\left(x - \frac{5a}{3}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{x} + \omega^2\left(x - \frac{5a}{3}\right) = 0, \text{--------} (1)$$

මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$. (5)

20

$X = x - \frac{5a}{3}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\dot{X} = \dot{x}$ හා $\ddot{x} = \ddot{x}$. (5)

දැන් (1) $\ddot{X} + \omega^2 x = 0$ බවට පත්වේ. (5)

10

කේන්ද්‍රයේදී $\ddot{X} = 0$.

$X = 0$. (5)

$\therefore x = \frac{5a}{3}$. (5)

$x = 3a$ විට $\dot{x} = 0$.

$\therefore$ විස්ථාරය $= 3a - \frac{5a}{3} = \frac{4a}{3}$. (5)

ආවර්ත කාලය $= \frac{2\pi}{\omega} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$. (5)

20

$\dot{X}^2 = \omega^2\left(C^2 - X^2\right)$

උපරිම වේගය ලැබෙන්නේ $X = 0$ විටය.

උපරිම $\dot{X}^2 = \omega^2 c^2$ (5)

$\therefore$ උපරිම $\dot{x}^2 = \frac{3g}{2a} \cdot \left(\frac{4a}{3}\right)^2$

$= \frac{3g}{2a} \cdot \frac{16a^2}{9} = \frac{8}{3} ag$ (5)

$\therefore$ උපරිම වේගය $= \sqrt{\frac{8ag}{3}}$. (5)

15

ගුරුත්වය යටතේ A සිට O දක්වා චලිතය

$v^2 = u^2 + 2as$:

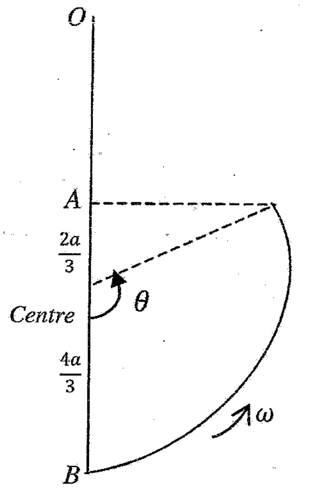
$v^2 = 2ag - 2ga$

$= 0$ (5)

$\therefore v = 0$.

$\therefore$ P යන්තමින් O වෙත ළඟා වේ. (5)

10



B සිට A දක්වා කාලය $= T_1$.

එවිට $T_1 = \dfrac{\theta}{\omega}$ (5)

$\theta = \pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (5)

$= \pi - \dfrac{\pi}{3}$

$= \dfrac{2\pi}{3}$ (5)

$\therefore T_1 = \sqrt{\dfrac{2a}{3g}} \cdot \dfrac{2\pi}{3}$ (5)

A සිට O දක්වා කාලය $= T_2$.

↑ $v = u + at$:

$0 = \sqrt{2ag} - gT_2$. (5)

$\therefore T_2 = \sqrt{\dfrac{2a}{g}}$ (5)

$\therefore$ B සිට O දක්වා මුළු කාලය $= T_1 + T_2$ (5)

$= \sqrt{\dfrac{2a}{3g}} \cdot \dfrac{2\pi}{3} + \sqrt{\dfrac{2a}{g}}$

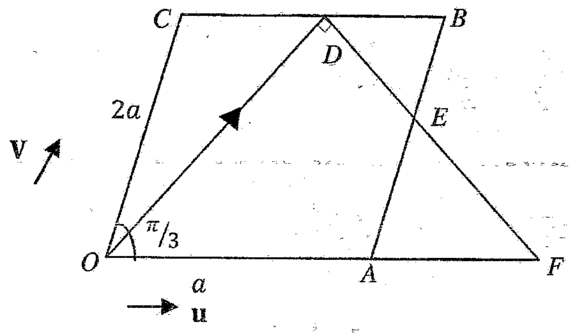
$= \sqrt{\dfrac{2a}{27g}}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$. (5)

40

P එහි ස්වභාවික දිගෙන් $2a$ දුරක් ඇදිය යුතු ය.

10

14.(a) $OA = a$, $OC = 2a$ හා $A\hat{O}C = \frac{\pi}{3}$ වන $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි ගනිමු. $\mathbf{u}$ හා $\mathbf{v}$ යනු පිළිවෙළින් $\overrightarrow{OA}$ හා $\overrightarrow{OC}$ දිශාවලට වූ ඒකක දෛශික යැයි ද ගනිමු.
$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි D යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.
OD යන්න DE ට ලම්බ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු.
$\overrightarrow{DE} = \frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v}$ බව පෙන්වන්න.
OA හා DE දික්කළ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය F යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OF} = \frac{7a}{2}\mathbf{u}$ බව පෙන්වන්න.



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} \quad (5)$$

$$= 2a\underline{v} + \frac{1}{2}a\underline{u}. \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v} \quad (5)$$

20

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= -\frac{1}{2}a\mathbf{u} - 2a\mathbf{v} + a\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + (\lambda - 2a)\mathbf{v} \quad (10)$$

40

$$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{DE} \Rightarrow \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \quad (5)$$

10

$$\left(\frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a\mathbf{u} + (\lambda - 2a)\mathbf{v}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{4}a^2\underbrace{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}_{=1} + \frac{1}{2}a(\lambda - 2a)\underbrace{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}_{=\frac{1}{2}} + a^2\underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}_{=\frac{1}{2}} + 2a(\lambda - 2a)\underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}_{=1} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}(\lambda - 2a) + \frac{1}{2}a + 2(\lambda - 2a) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{9\lambda}{4} = 4a - \frac{3}{4}a + \frac{2a}{4}$$

$$\frac{9\lambda}{4} = 4a - \frac{a}{4}$$

$$\lambda = \frac{15}{9}a \quad = \frac{5}{3}a. \quad \textcircled{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + \left(\frac{5a}{3} - 2a\right)\mathbf{v}$$

$$= \frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v} \quad \textcircled{5}$$

40

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DF} \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \quad \mu\mathbf{u} = \frac{1}{2}a\mathbf{u} + 2a\mathbf{v} + \beta\left(\frac{a}{2}\mathbf{u} - \frac{a}{3}\mathbf{v}\right) \quad \textcircled{5}$$

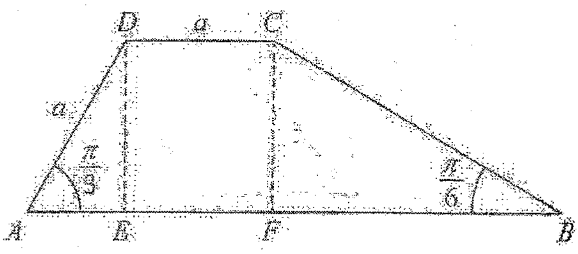
$$\mu = \frac{1}{2}a + \beta\frac{a}{2} \text{ හා } 0 = 2a - \frac{\beta a}{3} \quad \textcircled{5} + \textcircled{5}$$

$$\therefore \beta = 6 \text{ හා } \mu = \frac{7a}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{OF} = \frac{7a}{2}\mathbf{u}. \quad \textcircled{5}$$

30

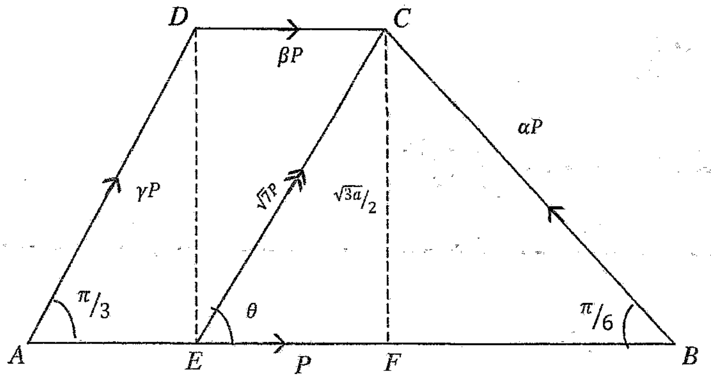
(b) AB හා DC සමාන්තර ද $A\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$, $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ හා $AD = DC = a$ ද වන $ABCD$ තුපීසියමක් යැයි ගනිමු. $A\hat{E}D = A\hat{F}C = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍ය E හා F වේ (රූපය බලන්න). විශාලත්ව $P, \alpha P, \beta P$ හා γP වූ බල පිළිවෙළින් AB, BC, DC හා AD දිගේ අක්ෂරවල අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියාකරයි.



ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\sqrt{7}P$ විශාලත්වයකින් යුත් බව හා එය E හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා E සිට C දෙසට යන බව ද දී ඇත. α, β හා γ හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, පද්ධතියට බල යුග්මයක් එකතු කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව F ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි ය. එකතු කළ බල යුග්මයෙහි ඝූර්ණය සොයන්න.

40



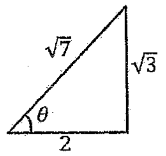
$$\overset{\frown}{C}\quad \left(\frac{\gamma P}{2}+P\right)\frac{\sqrt{3}a}{2}-\frac{\gamma P\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right)=0 \quad (10)$$

$$\frac{\gamma}{2}+1-\frac{3\gamma}{2}=0$$

30

$$r = 1. \quad (5)$$

$$\uparrow \quad \gamma P\frac{\sqrt{3}}{2}+\alpha P\frac{1}{2}=\sqrt{7}P\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad (10)$$



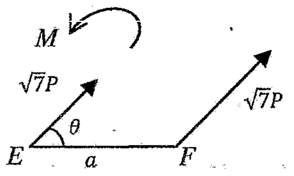
$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}$$

$$\alpha = \sqrt{3}. \quad (5)$$

$$\rightarrow \quad P+\beta P+P\times\frac{1}{2}-\sqrt{3}P.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}P.\frac{2}{\sqrt{7}} \quad (10)$$

$$\beta = 2. \quad (5)$$

45



F ↻ $\sqrt{7}Pa\sin\theta - M = 0$ (5)

$$M = \sqrt{7}Pa \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

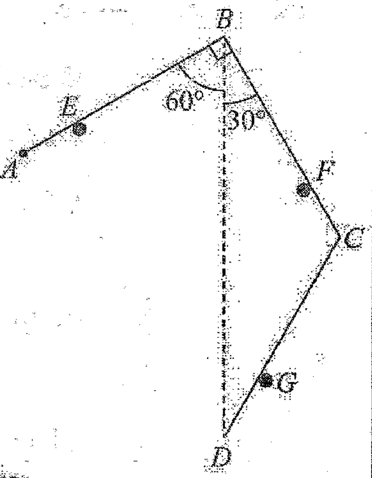
$$= \sqrt{3}Pa$$ (5)

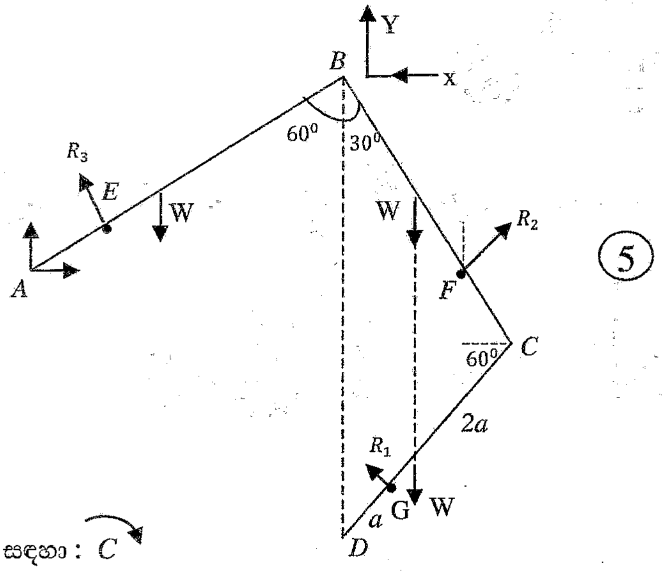
යුග්මයේ ඝූර්ණය $= \sqrt{3}Pa$ ↺ (5)

15

15

15. (*a*) $4a$ සමාන දිගින් හා W සමාන බරින් යුත් AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B හා C අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. A අන්තය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසවු කර ඇත.
රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $AE = CF = DG = a$, $A\hat{B}D = 60^\circ$, $C\hat{B}D = 30^\circ$ හා BD සිරස් වන පරිදි දඬු තුන සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ E, F හා G සුමට නාදැති තුනක් මත තැබීමෙනි.
(i) G නාදැත්ත මගින් CD දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{W}{3}$ බව ද,
(ii) F නාදැත්ත මගින් BC දණ්ඩ මත යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{11W}{9}$ බව ද,
පෙන්වන්න.
AB දණ්ඩ මගින් BC දණ්ඩ මත B සන්ධියේදී යොදන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.





(5)

(i) DC දණ්ඩය සඳහා : C ↻

$$R_1 \times 3a - W \times 2a\cos 60^0 = 0 \quad (5)$$

$$R_1 = \frac{W}{3}. \quad (5)$$

15

(ii) BCD සඳහා: B ↺

$$R_2 \times 3a - 2 \times W \times 2a\sin 30^0$$
$$-R_1\cos 30^0 \times 7a\cos 30^0 + R_1\sin 30^0 \times a\sin 30^0 = 0 \quad (10)$$

$$3R_2 = 2W + \frac{W}{3} \times 7 \times \frac{3}{4} - \frac{W}{3} \times \frac{1}{4}$$
$$= 2W + \frac{20W}{12}$$

$$\therefore R_2 = \frac{11W}{9}. \quad (5)$$

15

BCD සඳහා : $\longrightarrow$

$$R_2 \cos 30^0 - R_1 \cos 30^0 - X = 0 \quad (5)$$

$$\therefore X = \frac{11W}{9}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{W}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}W}{18} = \frac{4\sqrt{3}}{9}W \quad (5)$$

$\uparrow$

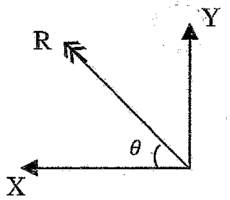
$$Y - 2W + R_1 \sin 30^0 + R_2 \sin 30^0 = 0 \quad (5)$$

$$\therefore Y = 2W - \frac{W}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{11W}{9} \times \frac{1}{2}$$

$$= 2W - \frac{14W}{18}$$

$$= \frac{11W}{9}. \quad (5)$$

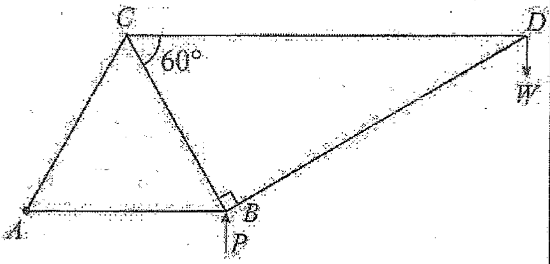
$$R = \sqrt{\frac{48}{81} + \frac{121}{81}}\ W = \sqrt{\frac{169}{81}}\ W = \frac{13}{9}W. \quad (5)$$



$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{\frac{11W}{9}}{\frac{4\sqrt{3}W}{9}} = \frac{11}{4\sqrt{3}}$$

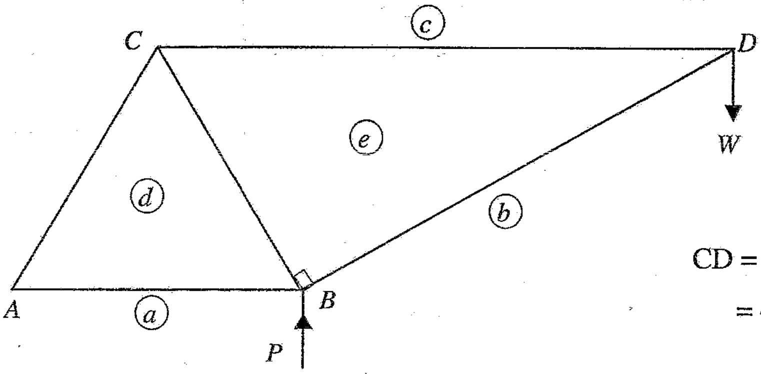
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{11}{4\sqrt{3}}\right). \quad (5)$$

(b) රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල, ඒවායේ අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CA, CD හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. $AB = BC = CA = 2a$, $C\hat{B}D = 90^\circ$ හා $B\hat{C}D = 60^\circ$ බව දී ඇත. W භාරයක් D සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති අතර රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස සන්ධි කර AB තිරස්ව සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ එයට B සන්ධියෙහිදී සිරස්ව උඩු අතට යෙදූ P බලයක් මගිනි.



(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් D, C හා B සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න. ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.



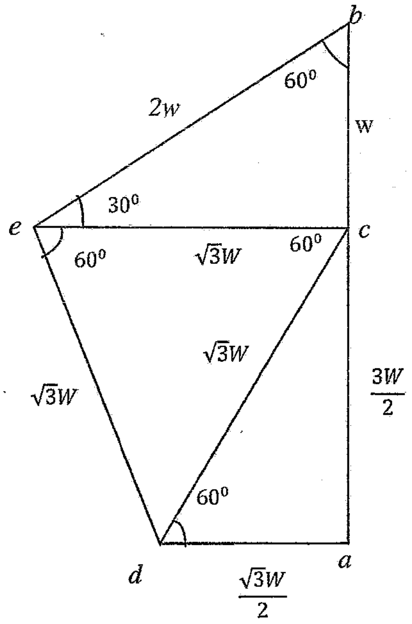
$CD = 2a\sec 60^0$

$= 4a$

A ↻ $P \times 2a - W \times (a + 4a) = 0$ (5)

$\therefore P = \frac{5W}{2}$. (5)

10



(30)

30

දණ්ඩ	විශාලත්වය	ආතතය/තෙරපුම
AB	$\dfrac{\sqrt{3}W}{2}$	තෙරපුම
BD	$2W$	තෙරපුම
DC	$\sqrt{3}W$	ආතතය
CA	$\sqrt{3}W$	ආතතය
BC	$\sqrt{3}W$	තෙරපුම

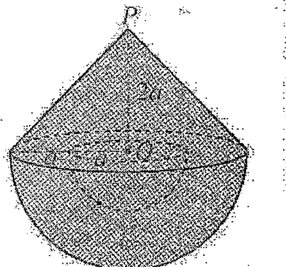
(50)

50

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු-වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

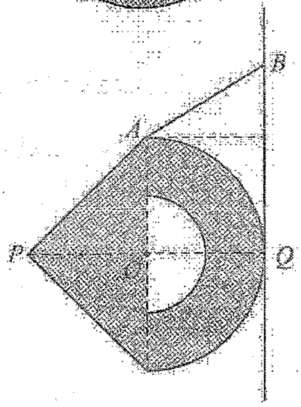
අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් අරය $2a$, කේන්ද්‍රය O හා ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, පතුලෙහි අරය $2a$ හා උස $2a$ වූ ඝනත්වය $\lambda\rho$ වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් අර්ධ ගෝලයෙහි ඉතිරි කොටසට යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති ආකාරයට දෘඪ ලෙස සවි කර ඇත. මෙලෙස සාදාගනු ලැබූ S වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, P සිට $\frac{(48\lambda+157)}{8(4\lambda+7)}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න; මෙහි P යනු S හි ඝන කේතුවෙහි ශීර්ෂය වේ.

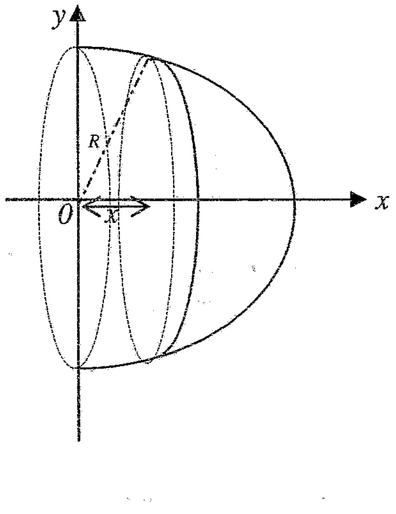
S හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O හි පිහිටීම සඳහා λ හි අගය සොයන්න.



දැන්, λ ට මෙම අගය ඇතැයි සිතමු.

Q යනු දික්කළ PO රේඛාව S හි පිටත අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය හමුවන ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. තව ද, A යනු S හි වෘත්තාකාර දාරය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. S වස්තුව රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A ලක්ෂ්‍යයට හා සිරස් බිත්තිය මත වූ B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. සමතුලික පිහිටුමේදී S හි පිටත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය Q ලක්ෂ්‍යයෙහිදී බිත්තිය ස්පර්ශ කරයි. O, A, B, P හා Q ලක්ෂ්‍ය බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි (යාබද රූපය බලන්න). $\mu \geq 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු S හි පිටත අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය හා බිත්තිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.





සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

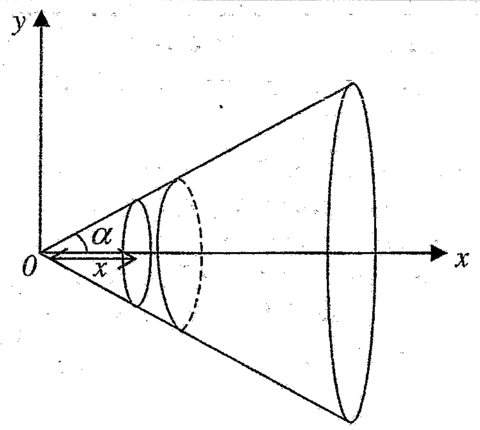
$OG = \overline{x}$. යැයි ගනිමු.

$$\overline{x} = \frac{\int_0^a \pi\left(a^2 - x^2\right)\rho x \mathrm{d}x}{\int_0^a \pi\left(a^2 - x^2\right)\rho \mathrm{d}x}$$ (5) + (5)

$$= \frac{\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a}{\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a}$$ (5) + (5)

$$= \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}}$$

$$= \frac{3a}{8}$$ (5)



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi x^2 \tan^2 \alpha \cdot \rho x dx}{\int_0^h \pi x^2 \tan^2 \alpha \cdot \rho dx}$$ (5) + (5)

$$= \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^h}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h}$$ (5)

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}.$$ (5)

∴ පතුලෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට ඊට ඇති දුර

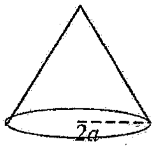
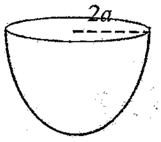
$$= h - \frac{3h}{4}$$

$$= \frac{h}{4}.$$ (5)

60

සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O හා P යා කරන රේඛාව මත පිහිටයි.

(5)

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්.කේ.ට P සිට දුර
	$\frac{1}{3}\pi(2a)^2\,2a\lambda\rho$ $=\frac{8}{3}\pi a^3\lambda\rho=4\lambda m$	$\frac{3}{4}(2a)=\frac{3a}{2}$
	$\frac{2}{3}\pi(2a)^3\rho$ $=\frac{16}{3}\pi a^3\rho=8m$	$2a+\frac{3}{8}(2a)$ $=\frac{11a}{4}$
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho=m$	$2a+\frac{3a}{8}$ $=\frac{19}{8}a$
S	$(4\lambda+7)m$	$\overline{x}$

(35)

මෙහි $m=\frac{2}{3}\pi a^3\rho.$

$$4\lambda m\times\frac{3a}{2}+8m\times\frac{11a}{4}-m\times\frac{19a}{8}=(4\lambda+7)m\times\overline{x}$$ (10)

$$6\lambda a+22a-\frac{19}{8}a=(4\lambda+7)\overline{x}$$

$$\therefore\ \overline{x}=\frac{(48\lambda+157)}{8(4\lambda+7)}a.$$ (5)

55

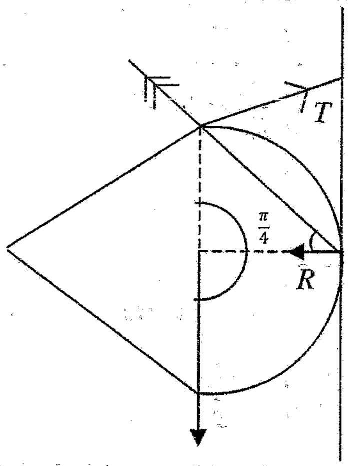
$\overline{x}=2a.$ (5)

$$\frac{48\lambda+157}{8(4\lambda+7)}a=2a$$ (5)

$$\therefore\ 48\lambda+157=64\lambda+112$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{45}{16}.$$ (5)

15



$$\frac{F}{R} = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad (15)$$

$$\mu \geq \frac{F}{R} \Rightarrow \mu \geq 1. \quad (5)$$

20

17. (*a*) පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම සුදු පාට බෝල 2 ක් හා කළු පාට බෝල 3 ක් B_1 පෙට්ටියක අඩංගු වේ. බෝල 3 ක් B_1 පෙට්ටියෙන් සසම්භාවී ලෙස, හිස් B_2 පෙට්ටියකට මාරු කරනු ලැබේ. ඉන්පසු B_2 පෙට්ටියෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) B_2 පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබූ බෝලය සුදු පාට වීමේ,

(ii) B_2 පෙට්ටියෙන් ඉවත ගනු ලැබූ බෝලය සුදු පාට බව දී ඇති විට, B_1 පෙට්ටියෙන් B_2 පෙට්ටිය තුළට සුදු පාට බෝල 2 ක් හා කළු පාට බෝල 1 ක් මාරු කර තිබීමේ

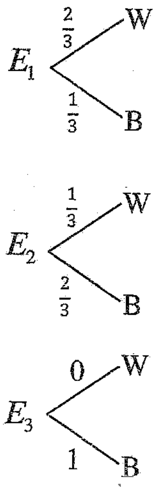
සම්භාවිතාව සොයන්න.

B_1 න් ඉවතට ගත් බෝල 3 න් i බෝල කළු පාට ඒවා වීමේ සිද්ධිය E_i යැයි ගනිමු; $i = 1, 2, 3.$

එවිට, $P(E_1) = \dfrac{{}^3C_1\,{}^2C_2}{{}^5C_3} = \dfrac{3}{10},$ (10)

$P(E_2) = \dfrac{{}^3C_2\,{}^2C_1}{{}^5C_3} = \dfrac{6}{10},$ (10)

$P(E_3) = \dfrac{{}^3C_3}{{}^5C_3} = \dfrac{1}{10}.$ (10)



$P(W|E_1) = \dfrac{2}{3}$

$P(W|E_2) = \dfrac{1}{3}$ (10)

$P(W|E_3) = 0$

මුළු සම්භාවිතා නියමයෙන් :

$$P(W) = P(W|E_1)P(E_1) + P(W|E_2)P(E_2) + P(W|E_3)P(E_3)$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{10} + \frac{1}{3}\times\frac{6}{10} + 0\times\frac{1}{10}$$ (10)

$$= \frac{2}{5}.$$ (5)

55

බේස් ප්‍රමේය :

$$P(E_1|\mathrm{W}) = \frac{P(\mathrm{W}|E_1).P(E_1)}{P(\mathrm{W})} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{1}{2} \quad (5)$$

15

(b) සිසුන් 20 දෙනෙකු ප්‍රහේලිකාවක් විසඳීම සඳහා ගත් කාලයන් එම එක් එක් කාලයෙන් 10 ක් අඩුකර ඉන්පසු 2 න් බෙදීම මගින් කේත කර ඇත.

සංඛ්‍යාත 2 ක් අතුරුදහන් වූ කේත කළ දත්තයන්හි සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දී ඇත.

කේත කළ කාලයන් (මිනිත්තු වලින්)	සංඛ්‍යාතය
0 – 2	2
2 – 4	f_1
4 – 6	9
6 – 8	f_2
8 – 10	1

කේත කළ කාලයන්හි නිමානය කළ මධ්‍යන්‍යය මිනිත්තු 4.4 බව දී ඇත. $f_1 = 6$ හා $f_2 = 2$ බව පෙන්වන්න.

කේත කළ කාලයන්හි සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

දැන්, ප්‍රහේලිකාව විසඳීම සඳහා ගත් සැබෑ කාලයන්හි මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

කේත කළ කාලයන් (මිනිත්තු වලින්)	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0 - 2	2	1	2	2
2 - 4	f_1	3	$3f_1$	$9f_1 = 54$
4 - 6	9	5	45	225
6 - 8	f_2	7	$7f_2$	$49f_2 = 98$
8 - 10	1	9	9	81
			$56 + 3f_1 + 7f_2$	460

$$12+f_1+f_2=20$$

$$\therefore \quad f_1+f_2=8 \text{ ------------(1)} \quad (5)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_2}=\frac{56+3f_1+7f_2}{20}=4.4 \quad (10)$$

$$\therefore 3f_1+7f_2=32 \text{ ------------(2)} \quad (5)$$

$$(1),(2)\Rightarrow f_1=6 \text{ and } f_2=2 \quad (5)$$

25

සම්මත අපගමනය $=\sqrt{\frac{460}{20}-(4.4)^2}$ (10) + (5)

(10) for 460

$=\sqrt{3.64}$ (5)

≈ 1.91

මාත පංතිය : $4-6$

මාතය $=L+\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right)c$

$$=4+\left(\frac{9-6}{(9-6)+(9-2)}\right)\times 2 \quad (5)$$

$$=4+\left(\frac{3}{3+7}\right)\times 2$$

$$=4.6 \quad (5)$$

30

---

y යනු සැබෑ කාලය යැයි ගනිමු.

එවිට, $x = \dfrac{y-10}{2}$.

$\therefore\ y = 2x+10.$ (5)

$\overline{y} = 2\overline{x}+10$

$\therefore \overline{y} = 2\times 4.4+10$

සැබෑ මාධ්‍යනාය $= 18.8$ (5)

$\sigma_y = 2\sigma_x$ (5)

සැබෑ සම්මත අපගමනය $= 2\times\sqrt{3.64} \quad \approx 2\times 1.91 \quad = 3.82$ (5)

සැබෑ මාතය $= 2\times 4.6+10$

$= 19.2$ (5)

25